

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Convección natural en geometrías para secadores de biomasa

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Francisco Peña Gallardo
Matrícula: 0004035H
frapega@gmail.com



ASESOR:
Dr. Alberto Beltrán Morales
albem@iim.unam.mx
IIM-UNAM

Morelia, Michoacán, Octubre, 2017

Considero que la historia es una rueda. "La inconstancia es mi esencia misma" -dice la rueda-. "Elévate conmigo si así lo quieres, pero no te quejes cuando vuelvas a caer en las profundidades", los buenos tiempos se van pero también los malos, la mutabilidad, es nuestra tragedia, pero también nuestra esperanza, las peores épocas así como las mejores siempre pasan.

Anicius Manlius Severinus Boëthius

Agradecimientos

A mi familia, principalmente a mis padres por el apoyo incondicional durante todos estos años que me ha llevado a ser quien soy y me ha permitido llegar hasta este momento.

A mi hermana y a mis sobrinas que siempre me alegran con su presencia.

A mi asesor el Dr. Alberto Beltrán Morales, por su amistad, apoyo y paciencia a lo largo de todo este tiempo que me ha permitido trabajar a su lado.

A mis sinodales, Dr. Hector Igor Pérez, M.C. Gabriel Arroyo Correa, M.C. José Vega Cabrera, Dr. Luis Mariano Hernández Ramírez y Dr. Mauricio Ortiz Gutierrez, por sus valiosas sugerencias, comentarios.

A mis compañeros y amigos, que me han acompañado a lo largo de esta etapa y que de forma directa o indirecta me han motivado a continuar.

También quisiera agradecer el apoyo del Fondo de Sustentabilidad Energética a través del proyecto SENER CONACYT 2014 246911 "Clúster de Biocombustibles Sólidos para la Generación Térmica y Eléctrica" por el financiamiento para la adquisición del clúster para cómputo de alto rendimiento, empleado para la realización de este trabajo.

Y un agradecimiento especial a la LFM. Patricia Manríquez Zavala quien me apoyó de forma incondicional para que se lograra este cometido.

Resumen

La presente tesis realiza un estudio del problema de Rayleigh-Bénard en diferentes geometrías propuestas para secadores de biomasa. Para llevar acabo este estudio se obtienen las ecuaciones que gobiernan este fenómeno, para posteriormente ser resueltas en su forma adimensional mediante el método de volumen finito a través del uso de OpenFOAM®, una herramienta de software libre para dinámica de fluidos computacional (CFD) en el cual el usuario esta presente en todas las etapas de la simulación (pre-procesamieto, solución, post-procesamiento), además de que permite el desarrollo de códigos específicos para cada problema que se planteé. Se validó el código resolviendo el problema de la cavidad de flotación, con el cual históricamente se han validado códigos de CFD para diversos problemas. Ya validado el código se procedió a realizar las simulaciones en diferentes geometrías 2D basadas en modelos propuestos para secadores de biomasa. Dentro del análisis de resultados, se obtuvo el parámetro Nusselt para determinar cual de estas geometrías es la más eficiente, resultando una geometría con dos ángulos ser mas eficiente.

Palabras clave: OpenFoam, Convección natural, Método de volumen finito, Secadores solares, CFD

Abstract

The present thesis presents a study of the Rayleigh-Bénard problem in different geometries proposed for biomass dryers. To carry out this study we obtained the equations that govern this phenomenon, to be solved in its dimensionless form by means of the finite volume method (FVM) through the use of OpenFOAM ®, a free software toolkit for Computational Fluid Dynamics (CFD) in the which the user is present in all stages of the simulation (pre-processing, solver, post-processing), in addition to allowing the development of specific codes for each problem that arises. We validated the code, solving the problem of a buoyancy-driven cavity, with which have historically validated CFD codes for various problems. Once validated the code has been carried out the simulations in different geometries 2D based on models proposed for biomass dryers, within the results analysis, we obtained the Nusselt parameter to determine which of these geometries is the most efficient, showing that the geometry with two angles being the most efficient.

Keywords: OpenFoam, Natural convection, Finite volume method, Solar dryers, CFD

Índice general

Índice de figuras xi

Índice de tablas xv

1. Introducción 1
- 1.1. Convección natural . . . 2
- 1.2. Aplicaciones de la convección natural: Problema de Rayleigh-Bénard . . . 5
  - 1.2.1. Secadores . . . 6
- 1.3. Dinámica de fluidos computacional . . . 7
- 1.4. Herramientas de software . . . 8
- 1.5. OpenFOAM® . . . 10

2. Ecuaciones de la convección natural 13
- 2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . 14
  - 2.1.1. Conservación de masa . . . 17
  - 2.1.2. Conservación de momento . . . 18
  - 2.1.3. Conservación de energía . . . 20
- 2.2. Aproximación de *Boussinesq* . . . 21
- 2.3. Ecuaciones adimensionales para problemas de convección natural . . . 21

3. Desarrollo y validación 25
- 3.1. Métodos numéricos . . . 25
  - 3.1.1. Método de volumen finito . . . 26
  - 3.1.2. Mallas . . . 26
  - 3.1.3. Ecuaciones de transporte . . . 28
  - 3.1.4. Discretización de las ecuaciones . . . 29
  - 3.1.5. Implementación numérica de las condiciones de frontera . . . 34
    - 3.1.5.1. Condiciones de Dirichlet . . . 34
    - 3.1.5.2. Condiciones de Neumann . . . 34
- 3.2. Algoritmos de solución . . . 35
  - 3.2.1. Malla alternada o staggered . . . 35
  - 3.2.2. Algoritmo PISO . . . 37

3.3. Validación del código 38
3.3.1. Cavidad de flotación 38
3.3.2. Estudio de la convergencia 39
3.3.3. Distribución de velocidad 43
3.3.4. Transferencia de calor 49

4. Geometrías para secadores de biomasa **57**
4.1. Geometrías 2D 58
4.2. Resultados 60
4.2.1. Estado estacionario y perfiles de velocidad 60
4.2.2. Isotermas y líneas de flujo 66
4.2.3. Cálculo del Nusselt 71

5. Conclusiones **73**

A. Código en OpenFOAM® **75**

Bibliografía **79**

Índice de figuras

1.1. Enfriamiento convectivo de un objeto caliente. 3
1.2. Resultados de los experimentos de Bénard. a) esquema representativo del movimiento del fluido en las celdas de convección, donde el fluido sube por el centro de la celda hexagonal y baja por el perímetro de ésta, b) fotografía original realizada por Bénard, en la que se muestra las celdas de Bénard en una capa de 0.810 mm de ancho, visualizadas mediante polvo de grafito, imagen tomada de [Koschmieder (15)]. 4
1.3. Mecanismos físicos en la convección natural. 5
1.4. Diagrama de un secador solar de biomasa. 6
1.5. Usuarios de software de CFD, gráfico tomado de [Analitics (1)]. 9

2.1. Diagrama de los flujos laminar y turbulento. 15
2.2. Molécula dentro del volumen. 16

3.1. Malla estructurada no regular. 27
3.2. Malla no estructurada. 28
3.3. Malla de discretización por volúmenes finitos en coordenadas cartesianas. 30
3.4. Funciones de interpolación de la derivada en las caras del volumen. a) Paso constante. b) Paso lineal. 32
3.5. Malla alternada o staggered. a) Para la velocidad en x. b) Para la velocidad en y. 36
3.6. Esquema de la cavidad de flotación. 39
3.7. Gráfica de sensibilidad de mallas. 42
3.8. Historial de convergencia para u, v y T mediante OpenFOAM®. Residual (E) vs Tiempo. 42
3.9. Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—) y CBS ($\Delta\Delta\Delta$). 44
3.10. Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ obtenidos mediante OpenFOAM®. 45
3.11. Perfil de velocidades de la componente horizontal para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—). . 45

3.12. Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ obtenidos mediante OpenFOAM®. 46
3.13. Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—), CBS ($\Delta\Delta\Delta$). 47
3.14. Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ obtenidos mediante OpenFOAM®. 47
3.15. Perfil de velocidades de la componente horizontal para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—). . 48
3.16. Perfil de velocidades de la componente horizontal para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ obtenidos mediante FVM. 48
3.17. Distribución del Nu_{local} en la pared caliente reportada por Won y Patnaik en [D. C. Wan (4)]; DSC. 50
3.18. Distribución del Nu_{local} en la pared caliente; OpenFOAM®. 51
3.19. Distribución del Nu_{local} en la pared fría reportada por Won y Patnaik en [D. C. Wan (4)]; DSC. 51
3.20. Distribución del Nu_{local} en la pared fría; OpenFOAM®. 52
3.21. Distribución del Nu_{local} para los casos con Rayleigh de $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ en la pared caliente; OpenFOAM®. 53
3.22. Distribución del Nu_{local} para los casos con Rayleigh de $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ en la pared fría, OpenFOAM®. 53
3.23. $log_{10}(\overline{Nu})$ vs $log_{10}(Ra)$. 55

4.1. Geometrías de estudio normalizadas: a) G0, b) G1, c) G2. Geometrías de estudio que mantienen el área: d) G3, e) G4. 59
4.2. Transición a estado estacionario componente u de la velocidad y para la temperatura T, para casos de $Ra = 10^4$. a) Componente u. b) Temperatura. 60
4.3. Transición a estado estacionario componente u de la velocidad y para la temperatura T, para casos de $Ra = 10^5$. a) Componente u. b) Temperatura. 61
4.4. Transición a estado estacionario componente u de la velocidad y para la temperatura T, para casos de $Ra = 10^6$. a) Componente u. b) Temperatura. 61
4.5. Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G0, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. 62
4.6. Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G1, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. 63

4.7. Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G2, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. 64
4.8. Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G3, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. 65
4.9. Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G4, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. 66
4.10. Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G0. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$. 67
4.11. Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G1. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$. 68
4.12. Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G2. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$. 69
4.13. Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G3. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$. 70
4.14. Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G4. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$. 71
4.15. a) Gráfica del Nusselt promedio sobre la superficie caliente de las geometrías para todos los casos, $\bar{Nu}$ versus Ra. b) Gráfica del Nusselt promedio sobre el techo de las geometrías para todos casos, $\bar{Nu}$ versus Geometría. 72

Índice de tablas

1.1. Listado de software comercial para CFD. 8

2.1. Clasificación de las principales categorías de flujos. 14

3.1. Parámetros necesarios para escribir las ecuaciones gobernantes en forma de ecuaciones de transporte. 29
3.2. Sensibilidad de malla en OpenFOAM®. 41
3.3. Comparativa de datos obtenidos por los métodos DSC y OpenFOAM®. 43
3.4. Comparación de los máximos de las componentes vertical y horizontal de la velocidad por los diferentes métodos (ADI, CBS, FEM, DCS y OpenFOAM®). 49
3.5. Comparativa del número de Nusselt Nu obtenido por los diferentes métodos descritos en esta sección. 54

4.1. Dimensiones de los secadores de biomasa dadas en metros (m). 57
4.2. Dimensiones normalizadas de las geometrías de estudio 2D. 58

Capítulo 1

Introducción

"With a little help from my friends"

— The Beatles.

De forma empírica sabemos, que si juntamos dos objetos a diferente temperatura "algo" fluye del objeto caliente al frío de manera que en un tiempo finito ambos tienen la misma temperatura. Esto es algo que llamamos flujo o transferencia de calor.

En general se reconocen tres modos de transferencia de calor: conducción, radiación y convección, los dos primeros, involucran un desequilibrio térmico para que se genere el flujo, a diferencia de la convección donde también existe un desequilibrio mecánico para que se lleve acabo.

Una forma de cuantificar el calor transferido, es mediante la primera ley de la termodinámica para sistemas cerrados, que relaciona la cantidad de calor que entra o sale y el trabajo realizado sobre o por el sistema, de forma matemática se expresa como

$$\underbrace{\dot{q}}_{\substack{\text{positivo}\\ \text{si entra al sistema}}} = \underbrace{p\frac{dV}{dt}}_{\substack{\text{negativo}\\ \text{si se realiza trabajo}\\ \text{sobre el sistema}}} + \underbrace{\frac{dU}{dt}}_{\substack{\text{positivo}\\ \text{cuando la energía}\\ \text{del sistema aumenta}}}, \tag{1.1}$$

donde p, V y U representan la presión, volumen y energía interna del sistema respectivamente. Cuando calor transferido ocurre sin la presencia de trabajo, se tienen dos casos particulares, cuando el proceso se realiza a volumen constante

$$\dot{q} = \frac{dU}{dt} = mc_v\frac{dT}{dt} \tag{1.2}$$

y cuando ocurre a presión constante

$$\dot{q} = \frac{dH}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt}, \tag{1.3}$$

donde m es la masa, c_v, c_p el calor específico de la substancia a volumen y presión constantes respectivamente y $H \equiv U + pV$ es la entalpía, una función de estado termodinámica, cuya variación expresa una medida de la cantidad de energía absorbida o cedida por el sistema, por lo que es importante en procesos de flujo. Cuando una substancia se considera incompresible (esto es que el volumen V es constante para cualquier variación de la presión) c_v y c_p son iguales.

Hasta el momento se ha mostrado una forma de cuantificar el calor transferido y conocer el sentido de este, para determinar la dirección haremos uso de la ley de Fourier, la cual determina que el flujo de calor resultante de la conducción térmica se da en dirección del gradiente de temperatura ademas es proporcional a su magnitud con signo opuesto y se expresa como

$$\mathbf{q} = -k\nabla T, \tag{1.4}$$

k es la conductividad térmica del material, el resultado es un vector que describe el flujo de calor.

La conducción puede ser vista desde un punto microscópico, como la transferencia de energía cinética entre partículas dentro de un material sea sólido o un fluido. A temperaturas más altas se asocian niveles mayores de energía molecular y por tanto un mayor movimiento aleatorio de éstas, incrementando las colisiones entre en la vecindad por lo que la transferencia de energía debe de ocurrir en dirección de la temperatura decreciente. Llamamos a esta transferencia de energía debida al movimiento aleatorio molecular como difusión de calor.

1.1 Convección natural

Involucra dos mecanismos. El flujo de calor debido a la difusión, y la transferencia de energía mediante el movimiento de materia (advección).

El proceso físico de la convección se debe al arrastre de calor producido por un fluido en movimiento que pasa sobre un cuerpo caliente. Considérese un objeto caliente sometido a una corriente de un fluido, como consecuencia de la interacción entre la superficie del cuerpo y el fluido, se genera una región en la cual la velocidad del fluido varia entre cero sobre la superficie y un valor finito u asociado a la corriente. A esta región se le conoce como capa hidrodinámica o capa límite. Además por la diferencia de

temperatura entre la superficie y el fluido, existe una región denominada capa térmica, en donde la temperatura varía de T_S (temperatura de la superficie del objeto) a T_∞ (temperatura a las afueras del flujo) como se muestra en la Fig. (1.1).

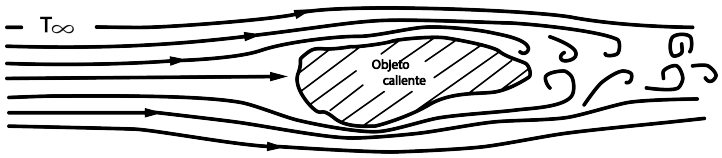


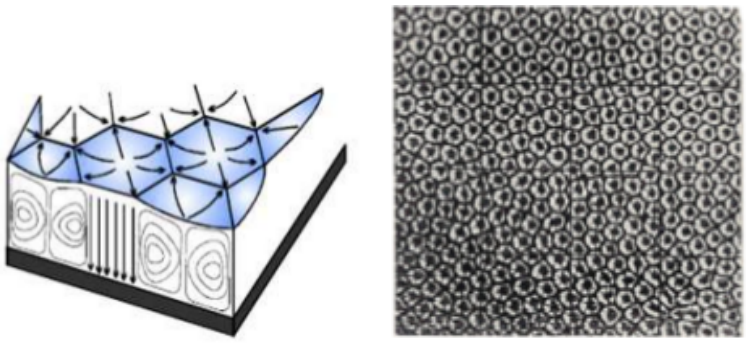
Figura 1.1: Enfriamiento convectivo de un objeto caliente.

La contribución debida a la difusión se mantiene cercana a la superficie, donde se considera que la velocidad del fluido es baja. De hecho, en la capa límite entre la superficie y el fluido, la velocidad es cero y el calor es transferido solamente por este mecanismo [Incropera (13)]. Mientras que la generada por la advección se produce por el arrastre de materia desde la capa límite hacia las afueras de esta, esto implica que la dinámica de fluido juega un rol importante y por tanto para el estudio de la convección es necesario el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes que serán descritas en el Capítulo 2.

La convección se puede clasificar de acuerdo a su naturaleza. Cuando es generada por agentes externos se dice que es convección forzada. En cambio se habla de convección libre o natural cuando se produce en presencia de un campo gravitatorio y existen diferencias de densidad en algunas regiones del fluido. Normalmente, dichas variaciones de densidad son debidas a los gradientes de temperatura, aunque es también común el caso en que se produzcan debido a gradientes de concentración. Asimismo, pueden presentarse fenómenos de convección natural en fluidos conductores con carga eléctrica cuando son sometidos a la acción de campos eléctricos o magnéticos, la rama que estudia este caso es la Magnetohidrodinámica (MHD). No obstante, el estudio de esta tesis se enfoca en el caso más común, en el que sólo se consideran variaciones de densidad debidas a un gradiente de temperatura, problema también conocido como convección natural de Rayleigh-Bénard.

El estudio sistemático de la convección natural, comienza a inicios de 1900, con una serie de experimentos realizados por Henri Bénard, en los que utilizó capas delgadas de esperma de ballena (por su elevada conductividad térmica) calentadas por debajo mientras que la superficie superior se encontraba expuesta al aire ambiental. Bénard observó la aparición de un movimiento en el fluido que, tras un régimen transitorio, alcanzaba un punto estacionario, el cual se distinguía en la superficie de la capa como una estructura en forma de celdas hexagonales regulares, semejantes a las que se observan en un panal de abejas. Las investigaciones realizadas por Bénard del flujo en el interior de la celdas, revelaron que el fluido ascendía por el centro de la celda y descendía a lo largo del perímetro hexagonal. Otras mediciones ópticas mostraron también que la

superficie del fluido sufría una depresión por el centro de la celda, y se atribuyó la aparición de este fenómeno a la tensión superficial del fluido en contacto con el aire.



(a) **(b)**

Figura 1.2: Resultados de los experimentos de Bénard. a) esquema representativo del movimiento del fluido en las celdas de convección, donde el fluido sube por el centro de la celda hexagonal y baja por el perímetro de ésta, b) fotografía original realizada por Bénard, en la que se muestra las celdas de Bénard en una capa de 0.810 mm de ancho, visualizadas mediante polvo de grafito, imagen tomada de [Koschmieder (15)].

Posterior al estudio de Bénard, en 1916, Lord Rayleigh publica su artículo "On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, When the Higher Temperature Is Under Side", siendo el primero en explicar de forma clara los mecanismos físicos involucrados en el fenómeno de la convección natural (Fig. 1.3). En su artículo expone, que en un fluido con densidad no uniforme y en presencia de la gravedad, existen fuerzas de flotación las cuales hacen que las regiones con un fluido menos denso que sus alrededores se eleven por el empuje realizado por el entorno que es más denso. Además de las fuerzas de flotación, Rayleigh toma en cuenta los mecanismos que contrarrestan este efecto: la fricción originada por las fuerzas viscosas, y la conducción de calor, que tiende a homogeneizar el campo de temperaturas dentro del fluido y por tanto, también el de densidades. De esta manera, si el fluido inicialmente en reposo con una distribución de densidad creciente en dirección opuesta al campo gravitatorio se le introduce una perturbación, el fluido volverá a un estado de reposo en un tiempo finito (caso estable) o se mantendrá en movimiento (caso inestable) dependiendo de la importancia relativa en los tres efectos antes citados. Por lo tanto, el caso de inestabilidad es la que da lugar al fenómeno de convección natural [Koschmieder (15)].

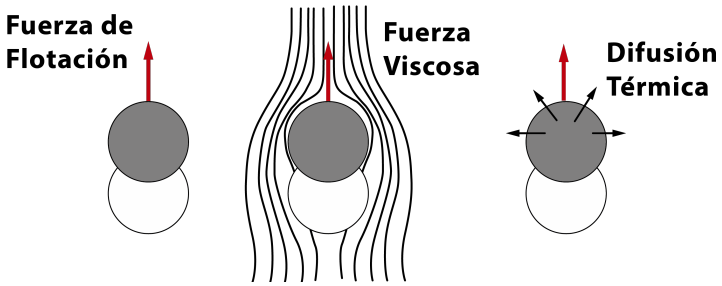


Figura 1.3: Mecanismos físicos en la convección natural.

El fenómeno de Rayleigh-Bénard se encuentra tanto en la naturaleza como en procesos industriales. Una manifestación en el mundo natural son los movimientos a gran escala en la atmósfera producidos por el gradiente de temperatura existente entre las zonas ecuatoriales y polares. Así como en la dinámica del manto terrestre, que esta gobernada por las corrientes de convección debidas a la diferencia de temperatura entre el núcleo y la corteza de la tierra. Son también numerosas las aplicaciones que se le dan a este fenómeno en el ámbito de la ingeniería y la industria. En la siguiente sección se profundizara más sobre este tema.

1.2 Aplicaciones de la convección natural: Problema de Rayleigh-Bénard

En las últimas tres décadas, se ha producido una revolución de la tecnología informática, que ha impactado en el crecimiento industrial y trae como consecuencia un mejoramiento en la calidad de vida. Adelantos en esta área han sido posibles gracias a los avances en la ingeniería de la transferencia de calor, los cuales aseguran el control de temperatura de los sistemas, que van desde lo nano con los circuitos integrados hasta la macro escala como los sistemas de enfriamiento usados en los centros de información. No sólo ha sido importante en la industria, avances como la cirugía láser, han mejorado el área médica [Incropera (13)]. Las tecnologías que funcionan con base en la captación solar también se han visto beneficiadas por los adelantos en la aplicación de la convección, en la actualidad se diseñan mejores convertidores solares, donde la energía captada por un colector refractario se transmite por convección al fluido de trabajo, esto se aplica tanto en calentadores de agua sanitaria, deshidratadores, invernaderos, por mencionar algunos. La aplicación se extiende virtualmente a casi todos los casos en los que se involucren conversión de energía y transferencia de calor.

Actualmente los esfuerzos están enfocados en aprovechar las fuentes de energía renovables como respuesta a los problemas ambientales ocasionados por el uso de combustibles

fósiles. El diseño e implementación de tecnologías (ecotecnias) que aprovechen eficientemente los recursos tanto naturales como materiales y además garanticen una operación limpia, económica, ecológica y sustentable en la generación de bienes y servicios necesarios para la vida cotidiana ha tenido un auge en los últimos años.

El uso de biomasa se ha fomentado como una opción a los combustibles fósiles, ya que es un tipo de energía renovable procedente del aprovechamiento de la materia orgánica formada en algún proceso biológico, generalmente es obtenida de los arboles, pero su uso no solo se limita como combustible, si no que también es usada como recurso para la manofactura de muebles, artesanías o en la construcción. Cualquiera que sea el caso de su utilización, la biomasa requiere de un tratamiento previo de secado, para eliminar la mayor cantidad de agua posible.

1.2.1 Secadores

Se clasifican, de acuerdo al principio físico bajo el cual se hace circular el aire, en secadores activos y pasivos. En los activos el aire es obligado a circular con ayuda de ventiladores generando una convección forzada, mientras que en los pasivos, el aire circula por efecto de la convección natural. Se subdividen, en secadores solares directos o indirectos, de acuerdo a si se permite incidir la radiación sobre la biomasa o no. En el presente estudio se considera el caso de secadores solares pasivos e indirectos.

Los secadores pasivos indirectos constan principalmente de un colector solar plano, cámara de secado y una chimenea (Fig. 1.4).

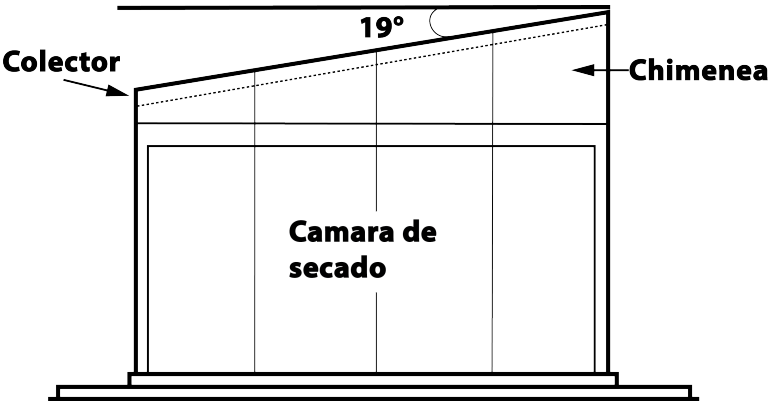


Figura 1.4: Diagrama de un secador solar de biomasa.

- El colector es la región donde se capta la radiación solar y se transmite en forma de calor al fluido (aire) que será usado en la cámara de secado para remover humedad a la biomasa, se constituye principalmente de una superficie capaz de absorber el

mayor espectro de onda (de color negro generalmente), además debe tener una inclinación que depende de la latitud local de la zona donde se piensa instalar el secador para maximizar la eficiencia, según lo reportado por [Ekechukwu and Norton (8)] en 1999.

- La cámara de secado es donde se confina la biomasa a procesar y se lleva acabo el fenómeno de convección, siendo esta es la región a estudiar.
- La chimenea es el conducto por el cual el flujo de aire húmedo sale de la cámara de secado.

1.3 Dinámica de fluidos computacional

Como se mencionó en la Sección 1.1, para describir el fenómeno de la convección son necesarias las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales son ecuaciones diferenciales parciales, que no pueden ser resueltas de forma analítica salvo para algunos casos especiales, por lo que se recurre a métodos numéricos para obtener una solución aproximada.

La dinámica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés), es el análisis de sistemas que involucren algún fluido en el que la transferencia de calor puede estar presente, por medio de simulaciones computacionales. Esta técnica es bastante poderosa y su aplicación se extiende en el sector industrial y el académico.

En la década de los setenta, la industria aeroespacial comenzó a integrar el uso de CFD para el diseño de aeronaves y propulsores de forma satisfactoria, esto hizo que su uso se difundiera en otros sectores industriales.

El desarrollo de CFD está estrechamente vinculada con el de la informática. Los primeros artículos en los que se aplican soluciones numéricas a problemas de mecánica de fluidos datan de 1933 [Thom (21)]. Desde su surgimiento la CFD se ha visto limitada por las capacidades computacionales del momento, lo que ha motivado a la creación de diferentes algoritmos más eficientes para dar solución a diversos problemas, pero conforme la complejidad y la necesidad de una mayor resolución en las simulaciones aumentó, el desarrollo de CFD se vio impulsado por varios proyectos de investigación en el ámbito del súper computo como los son: Federal High Performance Computing and Communication Program (HPCC) en Estados Unidos, Europort proyect en la Unión Europea, Deutsche Forschungsgesellschaft (German Research Foundation) en Alemania por mencionar algunos [Griebel et al. (11)].

Algunas de las ventajas que se obtienen al usar CFD son:

- Reducción sustancial de los tiempos y costos de diseño.
- Estudiar sistemas donde experimentos controlados son difíciles de realizar.

- Estudiar sistemas en condiciones peligrosas y mas allá de sus limitantes de desempeño, como en estudios de seguridad y escenarios de accidentes.

La implementación de CFD consta de tres partes principales:

- Pre-procesamiento: Definición de la geometría del problema (dominio computacional), subdivisión de el dominio en celdas o volúmenes de control (mallado), selección del fenómeno físico a ser modelado, establecer las propiedades del fluido así como las condiciones de frontera apropiadas.
- Uso del método solución (solver): Discretización de las ecuaciones gobernantes del fenómeno dependiendo del método numérico a utilizar, solución del sistema de ecuaciones.
- Post-procesamiento: Visualización del mallado y el dominio computacional, graficación de líneas de contorno, superficies en 2D o 3D, perfiles de velocidad, seguimiento de partículas, manipulación visual, etc.

1.4 Herramientas de software

Debido a la creciente demanda de códigos de CFD en las ultimas décadas, han surgido diferentes paquetes de software comercial que tiene sofisticadas interfaces de usuario para ingresar los parámetros, permiten la importación diseños asistidos por computadora (CAD por sus siglas en inglés) para su posterior mallado, o incluso algunos cuentan con su propia utilería CAD, son capaces de modelar fluidos no Newtonianos, flujos de dos fases, propiedades dependientes del flujo, cambios de fase, flujos a través de medios porosos, entre otros. Algunos de estos programas se en listan en la siguiente tabla (1.1)

Software	**Compañía**
· ALGOR	Algor, Inc.
· CFX	AEA Technology
· STAR-CCM+	Computational Dynamics Ltd.
· ANSYS	Ansys, Inc.
· COMSOL Multiphysics	Comsol, Inc.

Tabla 1.1: Listado de software comercial para CFD.

A pesar de todas las características y funcionalidades que ofrecen estos programas, tanto

en el pre-procesamiento como en el post-procesamiento, no permiten la manipulación del solver, de forma que el usuario no puede seleccionar diferentes esquemas de solución.

En el año 2016 y con el fin de saber cual es la herramienta mas utilizada en CFD, se realizó una encuesta informal en una de las comunidades virtuales de CFD más grandes a lo largo de la world wide web (cfd-online.com), la cual cuenta con más de 150 mil usuarios activos entre académicos e investigadores de la industria, arrojó que ANSYS FLUENT es la más utilizada por los participantes de dicha encuesta, seguida de STAR-CCM+ y OpenFOAM® en tercer lugar. Esta encuesta fue realizada por Resolved Analytics, una compañía que brinda servicios de CFD a pequeñas y medianas empresas. Si bien la encuesta no es significativa, muestra las preferencias que tienen los usuarios en una comunidad cuantiosa (Fig. 1.5).

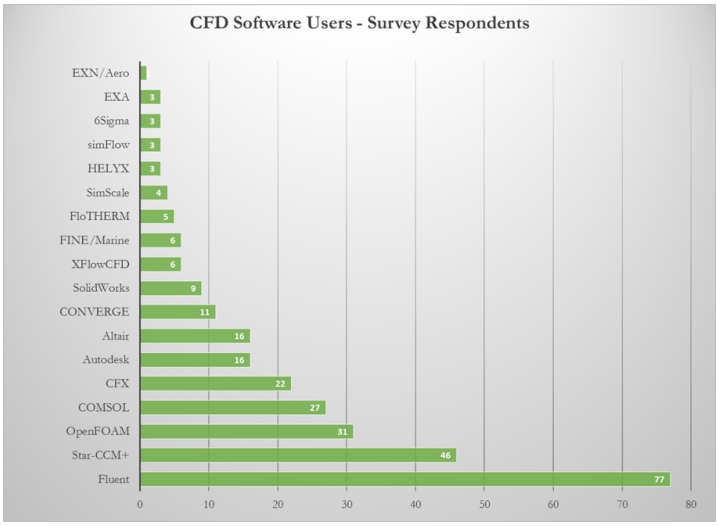


Figura 1.5: Usuarios de software de CFD, gráfico tomado de [Analitics (1)].

En contraparte de los programas comerciales, existen herramientas de código libre que permiten la completa manipulación por parte del usuario en todas las fases de la implementación de CFD, aunque no son tan completas como las comerciales, ya que algunas carecen de utilerías para el pre y post procesamiento, por lo que para realizar estas tareas se tiene que recurrir a programas especializados también de código libre, algunos son: Salome y GMSH, para el modelado y mallado, Gnuplot y ParaView en la parte de visualización y post-procesamiento. Algunas de estas herramientas han sido desarrolladas en universidades como el Imperial College en Londres o la Universidad de Stanford en Estados Unidos.

En el siguiente listado se nombran algunos de los programas de software libre:

- OpenFOAM®

- SU2
- Helyx
- PyFR
- FEniCS

siendo OpenFOAM®, la herramienta empleada para el desarrollo de esta tesis.

1.5 OpenFOAM®

OpenFOAM® (Open source Field Operation And Manipulation), originalmente FOAM, fue creado por Henry Weller a finales de 1980 en el Imperial College en Londres, con el fin de desarrollar una plataforma de simulación más flexible y poderosa que el estándar usado en ese tiempo (FORTRAN). Esto lo llevó a elegir el lenguaje de programación C++, ya que es un lenguaje orientado a objetos y es modular. En 2004, Henry Weller, Chris Greenshields y Mattijs Janssens fundaron OpenCFD Ltd. para desarrollar y sacar al mercado OpenFOAM®. En el año 2011, OpenCFD fue comprada por Silicon Graphics International. El mismo año, los derechos de OpenFOAM® fueron transferidos a OpenFOAM Fundation, una organización sin fines de lucro, encargada del manejo y distribución de OpenFOAM®. Actualmente Weller y Greenshields, continúan trabajando en el desarrollo, manejo y distribución de OpenFOAM® a través del sitio cfd.direct.

Una de las características distintivas de OpenFOAM® es su sintaxis para operaciones tensoriales y ecuaciones diferenciales, que se asemeja a las ecuaciones a resolver, por ejemplo

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \phi \mathbf{U} - \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{U} = -\nabla p$$

es representada en el código por

```
solve
(
fvm::ddt(rho,U)
+       fvm::div(phi,U)
-       fvm::laplacian(mu,U)
==
-       fvc::grad(p)
);
```

está sintaxis, se logra mediante el uso de programación orientada a objetos y sobrecarga de operadores, que permite al usuario crear solvers con relativa facilidad. OpenFOAM®

esta constituido por una gran librería base, que brindan las siguientes capacidades al código:

- Operaciones tensoriales y de campos.
- Discretización de ecuaciones diferenciales parciales. usando una sintaxis legible al usuario.
- Solución de sistemas lineales.
- Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Paralelización automática de operaciones de alto nivel.
- Mallas dinámicas.
- Modelos físicos generales:
    - Reológicos.
    - Termodinámicos.
    - Turbulentos.
    - Cinemáticos.
    - Métodos de seguimiento Lagrangiano de partículas.
    - Reacciones químicas.
    - Transferencia de calor por radiación.

Además cuenta con diferentes utilerías para:

- Mallado: como generador de mallas computacionales a partir de un archivo que contenga la geometría, es capaz de convertir mallas generadas usando otras herramientas al formato de OpenFOAM®, y modificarlas, como hacer refinamientos localizados, definición de regiones entre otros.
- Procesamiento en paralelo: proveen herramientas de descomposición de dominio, reconstrucción y redistribución del caso computacional para realizar cálculos de manera paralela.
- Pre-procesamiento: contiene herramientas que preparan los casos, como establecer las propiedades del fluido, OpenFOAM® es un código dimensional, esto es, que dichas propiedades requieren tener la dimensiones físicas correctas para que se pueda operar con ellas.
- Post-procesamiento: herramientas que procesan los resultados de las simulaciones, e incluye una interfaz de comunicación con ParaView.

Podemos hacer una lista de ventajas y desventajas en el uso de OpenFOAM®

- Desventajas:

  · La comunidad de desarrollo sufre cierta fragmentación, lo que da paso a numerosas ramas del proyecto.

  · Ausencia de una interfaz gráfica para el usuario.

  · La guía del programador no provee de suficientes detalles, haciendo la curva de aprendizaje bastante escarpada, en el caso que se requiera escribir aplicaciones o agregar nuevas funcionalidades.

- Ventajas:

  · Sintaxis amigable para el usuario.

  · Documentación completa del código fuente.

  · Capacidad de manejo de mallas estructuradas y no estructuradas.

  · Paralelización automática de las aplicaciones usando una sintaxis de alto nivel.

  · Amplio espectro de aplicaciones y modelos listos para usar.

  · Soporte comercial y entrenamiento previsto por los desarrolladores.

  · Total manipulación por parte del usuario, en todas las etapas de la simulación.

  · Es libre, la licencia no tiene costo.

Capítulo 2

Ecuaciones de la convección natural

"Estamos literalmente en un punto significativo en la historia. Una tercera rama del método científico, la simulación computacional, está emergiendo como una herramienta del día a día. Está tomando su lugar junto al desarrollo experimental y la teoría matemática como una forma de nuevos descubrimientos en ciencia e ingeniería"

— John Rollwagen, director ejecutivo de Cray Research.

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es aquella que relaciona a la función incógnita y sus derivadas parciales. Su orden se define como el orden más alto de las derivadas que aparecen en la ecuación, y su grado está dado por el exponente de mayor orden de alguna derivada [Olver (18)]. Se pueden clasificar en parabólicas, elípticas e hiperbólicas.

Como se propuso en el Capítulo 1, el fenómeno de la convección está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales están dadas en diferenciales parciales y tienen una clasificación que dependen de las características del fluido, la tabla (2.1) muestra un resumen de las clasificaciones formales para las ecuaciones de flujo, descritas por Fletcher en su artículo [Diersch (7)].

	Flujo estacionario	Flujo inestable
Flujo viscoso	Elíptica	Parabólica
Flujo no viscoso	$M < 1$ Elíptica $M > 1$ Hiperbólica	Hiperbólica
Capas cortantes delgadas	Parabólica	Parabólica

Tabla 2.1: Clasificación de las principales categorías de flujos.

M es el número Mach. Las ecuaciones utilizadas en el desarrollo de esta tesis son para el caso de un flujo viscoso y estacionario, por tanto son elípticas.

Una EDP se considera bien planteada cuando existe una única solución que depende continuamente de los datos iniciales. Para cumplir con lo anterior, se deben satisfacer condiciones iniciales, las cuales son dadas en un tiempo fijo o inicial, y condiciones de frontera, que se satisfacen en la frontera del dominio para todo tiempo.

Existen diferentes tipos de condiciones de frontera:

- **Condiciones de Dirichlet:** o tipo 1, son aquellas que especifican el valor de la solución en la frontera del dominio.
- **Condiciones de Neumann:** dichas condiciones nos dan el valor de la derivada normal de la solución en la frontera del dominio, son clasificadas como tipo 2.
- **Condiciones de Robin:** o tipo 3, son una combinación lineal de Dirichlet y Neumann.

2.1 Ecuaciones de Navier-Stokes

Llamamos fluido a alguna substancia formada por un conjunto finito de moléculas que se mantienen unidas entre sí por fuerzas cohesivas débiles lo que permite el cambio de su posición relativa con facilidad. Bajo una definición más formal, decimos que un fluido es toda aquella substancia que se deforma de manera continua cuando está es sometida a un esfuerzo cortante.

Los fluidos exhiben 2 clases principales de propiedades: físicas y de transporte. La viscosidad, conductividad térmica y la difusividad de masa entran en la clase de propiedades de transporte; la densidad corresponde a las físicas.

Si consideramos un elemento dentro de un fluido en movimiento, la trayectoria que describe se denomina línea de flujo. La velocidad del elemento puede variar en magnitud y dirección a lo largo de su trayectoria. Si cada elemento que pasa por un punto dado sigue la misma línea de flujo que los elementos precedentes se dice que el flujo es estable o estacionario. Esto implica que la velocidad en cada punto dentro del flujo permanece constante en el tiempo, aunque la velocidad de la partícula cambie al moverse de un punto a otro. Si la velocidad del flujo varía de un instante a otro, es considerado inestable. Cuando el movimiento del fluido tiene un comportamiento ordenado, de manera que se traslada en láminas paralelas sin entremezclarse, se denomina flujo laminar, ocurre a velocidades relativamente bajas o cuando se tiene una viscosidad alta. En cambio, cuando el movimiento se torna irregular, las trayectorias de las partículas se tornan irregulares formando pequeños vórtices no ordenadas en el flujo, se llama flujo turbulento, la Fig. (2.1) muestra un diagrama de los flujos.

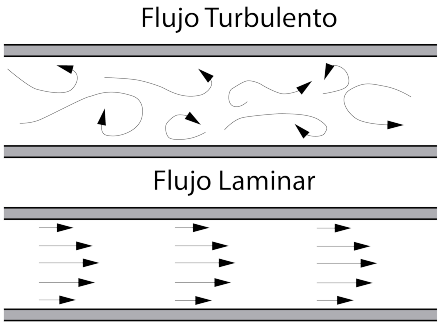


Figura 2.1: Diagrama de los flujos laminar y turbulento.

Para derivar las ecuaciones de la dinámica de fluidos, se puede estudiar el fluido de manera microscópica, considerado el movimiento de las moléculas que lo componen y las leyes de la dinámica que describen su movimiento. El comportamiento macroscópico del fluido entonces se predice mediante las leyes de la mecánica estadística. Esta manera de deducir las ecuaciones conlleva a expresiones de los coeficientes de transporte, conductividad térmica y viscosidad. Pero la teoría está incompleta para gases poliatómicos y líquidos, sin embargo; bien desarrollada para gases ligeros [Currie and Currie (3)]. Por otro lado, si consideramos el fluido como un campo de flujo y vemos su comportamiento en un punto específico del espacio, podemos predecir el comportamiento microscópico del fluido. Este método de análisis es llamado euleriano, y es el que se usará para derivar las ecuaciones gobernantes.

Consideremos que la distancia libre promedio entre molécula y molécula es bastante pequeña comparada con la distancia física más pequeña del campo de flujo, como lo podría ser el radio de una esfera por la cual pasa el fluido. Así podemos ignorar la estructura molecular del fluido y suponer que en cada punto de este, existe un único

valor para la densidad, presión y velocidad, llamadas variables del campo o primitivas, que en general dependen de la posición $\mathbf{x}$ y del tiempo t.

Sea ΔV un pequeño volumen en el fluido el cual encierra una gran cantidad de moléculas y Δm la masa de cualquier molécula dentro de ΔV (ver Fig. 2.2).

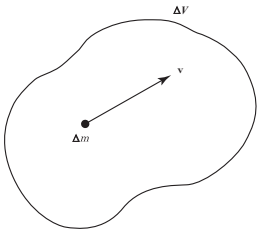


Figura 2.2: Molécula dentro del volumen.

por lo que la distribución de masas dentro de ΔV está descrita por el perfil de densidad de las moléculas contenidas en el volumen

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\sum \Delta m}{\Delta V} \right), \tag{2.1}$$

decimos que se cumple la "Hipótesis del Continuo" [Prieve (20)], si el límite dado por (2.1) converge mucho antes de que el volumen decrezca al tamaño de una molécula.

Todas las substancias que satisfacen la definición anterior, se dice que se comportan como un Continuo.

Ya que se ha establecido la perspectiva euleriana como marco de referencia y definido el concepto de Continuo, procederemos a derivar las ecuaciones gobernantes mediante variables fundamentales las cuales serán propiedades intensivas en vez de extensivas.

Tomemos un volumen de control infinitesimal fijo Ω y sea ϕ alguna propiedad intensiva conservada, entonces su correspondiente propiedad extensiva Φ puede ser expresada como

$$\Phi = \int_{\Omega} \rho \phi dV, \tag{2.2}$$

dado que nuestro sistema es euleriano, debemos de calcular la razón de cambio de la propiedad Φ que pasa por Ω, para esto, haremos uso del Teorema de transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi dV = \int_{\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial t}dV + \int_{\partial\Omega}\phi\mathbf{u}\cdot\hat{n}dS, \tag{2.3}$$

y el Teorema de la divergencia de Gauss

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{U}dV = \int_{\partial\Omega}\mathbf{U}\cdot\hat{n}dS, \tag{2.4}$$

donde $\partial\Omega$ denota la superficie de Ω, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ el vector de velocidades en las direcciones $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ respectivamente, $\mathbf{U}$ cualquier campo vectorial y $\hat{n}$ el vector normal a la superficie $\partial\Omega$.

2.1.1 Conservación de masa

Considerando que dentro del flujo no existe creación ni desintegración de materia con el paso del tiempo, la cantidad de masa permanece constante dentro de Ω esto es

$$\frac{dm}{dt} = 0,$$

utilizando las Ecs. (2.2) y (2.3), en este caso la propiedad extensiva es la masa $\Phi = m$ y la propiedad intensiva $\phi = 1$, nos queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho dV + \int_{\partial\Omega}\rho\mathbf{u}\cdot\hat{n}dS = 0, \tag{2.5}$$

aplicando el Teorema de Gauss en la integral de superficie, obtenemos una ecuación con integrales de volumen fácilmente resoluble, por lo que la Ec. (2.5) la podemos expresar como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{2.6}$$

conocida como ecuación de continuidad. En el caso de un fluido incompresible la densidad se considera constante en todo momento, por lo que se reescribe como

$$\rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{2.7}$$

2.1.2 Conservación de momento

La cantidad de momento del fluido, se obtiene a partir de la segunda ley de *Newton*. Consideremos que la variación de momento en un volumen Ω que es atravesado por el flujo, es igual a las suma de las fuerzas externas que actúen sobre el volumen de control

$$\frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = \sum \mathbf{F}, \tag{2.8}$$

donde $\mathbf{F}$ son las fuerzas que actuan sobre Ω.

Las fuerzas que se consideran actúan sobre el volumen de control son:

- Fuerzas superficiales (presión, tensión superficial, esfuerzo, cortantes, etc.).
- Fuerzas de cuerpo (gravedad, electromagnéticas, etc.).

De manera análoga al caso de conservación de masa, haremos uso de las Ecs. (2.8) y (2.3), donde la propiedad $\phi = \mathbf{u}$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\hat{n})dS = \sum \mathbf{F}, \tag{2.9}$$

para fluidos Newtonianos como el considerado en este caso, las fuerzas superficiales que actúan sobre Ω se pueden representar mediante un tensor de esfuerzos $\mathbf{T}$ de orden 2, que se expresa como

$$\mathbf{T} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{u}\right)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \tag{2.10}$$

donde p es la presión estática, μ es el coeficiente de viscosidad dinámica, $\mathbf{I}$ el tensor unidad y $\mathbf{D}$ es el tensor de deformación, el cual se escribe

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\dagger}], \tag{2.11}$$

la expresión $(\nabla\mathbf{u})^{\dagger}$ es el tensor transpuesto resultante del gradiente de la velocidad. Agrupando los términos viscosos del tensor de esfuerzos, se obtiene el tensor de viscosidad que está dado de manera general por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{2\mu}\left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{I}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\right); \tag{2.12}$$

sin embargo, para fluidos incompresibles el segundo término del lado derecho de la Ec. (2.12) es igual a cero por la Ec. de continuidad (2.7), entonces el tensor de viscosidad se reduce a

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{2}\boldsymbol{\mu}\mathbf{D}. \tag{2.13}$$

Ya descritas las componentes de la fuerza superficial, podemos reescribir la Ec. (2.9) como

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\mathbf{u}dV + \int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\hat{n})dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}\cdot\hat{n}dS + \int_{\Omega} \rho\mathbf{b}dV, \tag{2.14}$$

donde $\mathbf{b}$ representa las fuerzas de cuerpo. Para nuestro caso, la única fuerza de cuerpo que actuá sobre el fluido es la gravedad por lo que podemos hacer $\mathbf{b} = \mathbf{g}$. Aplicando el Teorema de Gauss, Ec. (2.4), reducimos la Ec. (2.14) a

$$\frac{\partial \rho\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla\cdot\mathbf{T} + \rho\mathbf{g}. \tag{2.15}$$

La ecuación anterior se dice que está en su forma fuerte de conservación, ya que todos sus términos se encuentran en forma de la divergencia de un tensor, una de las propiedades importantes de esta forma es que al ser usada con el método de volumen finito asegura la conservación de momento global en el cálculo; además de asegurar que el método numérico no divergirá por lo que la solución se puede considerar como realizable [Ferziger and Peric (9)].

Operando sobre las divergencias en la Ec. (2.15), tenemos que

$$\rho\nabla\cdot(\mathbf{u}\mathbf{u}) = \rho\mathbf{u}\nabla\cdot\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}, \tag{2.16}$$

por la ecuación de continuidad (2.7) el primer término del lado derecho de la igualdad es cero, para el tensor de esfuerzos, lo podemos reescribir como

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{p}\mathbf{I},$$

su divergencia tendrá la forma

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = \mu\nabla^2\mathbf{u} - \nabla p, \tag{2.17}$$

sustituyendo las Ecs. (2.16) y (2.17) en la ecuación (2.15) resulta

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{g}, \tag{2.18}$$

la expresión anterior es también llamada ecuación de Navier-Stokes.

2.1.3 Conservación de energía

Tomemos la entalpía como medida de la cantidad de calor en el fluido, por lo que la expresión que determina la razón de cambio de esta propiedad es

$$\frac{dH}{dt} = \sum f, \tag{2.19}$$

donde f representa los diferentes medios por los que el calor ingresa o sale del sistema. La difusión de calor siempre se encuentra presente en la convección y la podemos expresar como

$$\mathbf{f}_q = \int_{\partial\Omega} k\nabla T\cdot\hat{n}dS, \tag{2.20}$$

siendo la ecuación anterior la ley de difusión de Fourier. De manera análoga a la ecuación de momento y tomando en cuenta la expresión (1.3), podemos reescribir la Ec. (2.19) como

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho c_p T dV + \int_{\partial\Omega}\rho c_p T\mathbf{u}\cdot\hat{n}dS = \int_{\partial\Omega} k\nabla T\cdot\hat{n}, \tag{2.21}$$

haciendo uso del Teorema de Gauss (2.4) obtenemos la siguiente ecuación para la energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \frac{k}{\rho c_p}\nabla^2 T, \tag{2.22}$$

en el caso de que se tengan alguna fuente o sumidero de calor, se puede agregar un término por lo que la Ec. (2.22) adopta la forma siguiente

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = \alpha\nabla^2 T + q_T, \tag{2.23}$$

donde q_T representa el calor añadido o absorbido por una fuente externa y α es el coeficiente de difusividad térmica.

2.2 Aproximación de *Boussinesq*

Para muchos fluidos la variación de la densidad es importante sólo en el término de las fuerzas de cuerpo en las ecuaciones de conservación de momento, como lo es el caso de la convección. En todos los otros términos de las ecuaciones donde aparece la densidad, las variaciones de esta llevan a un efecto insignificante, la Ec. (2.15) de momento considerando estas variaciones puede ser expresada como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\mathbf{g}, \tag{2.24}$$

donde ρ_0 es una densidad de referencia, $\nu = \mu/\rho_0$ es el coeficiente de viscosidad cinemática y $\delta\rho$ representa la variación de la densidad. Por lo regular la densidad depende de la presión y de la temperatura, pero en nuestro caso en el que se considera un fluido incompresible, la densidad no depende de la presión.

La aproximación de *Boussinesq* consiste en despreciar cualquier variación de las propiedades del fluido en función de la temperatura como la viscosidad cinemática, la difusividad y el coeficiente de expansión térmica y asumir que la densidad varia linealmente con la temperatura, la cual se expresa usualmente como

$$\delta\rho = -\rho_0 \beta (T - T_0), \tag{2.25}$$

el término anterior es negativo ya que por lo regular se considera que la fuerza de cuerpo apunta en sentido opuesto a la dirección al campo de fuerza entonces dado un sistema coordenado $\mathbf{g} = -g\hat{k}$ donde $\hat{k}$ es el vector unitario actuando en sentido positivo, β es el coeficiente de expansión térmica del fluido y T_0 representa una temperatura media en la que el fluido se encuentra en un equilibrio estático. Sustituyendo $\delta\rho$ en la Ec. (2.24)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta (T - T_0)\mathbf{g}. \tag{2.26}$$

Esta aproximación genera errores del orden del 1 % si la diferencia de temperatura se encuentra por debajo de $15°K$ para el aire [Ferziger and Peric (9)].

2.3 Ecuaciones adimensionales para problemas de convección natural

Las ecuaciones de la convección natural por lo regular son expresadas en una forma adimensional, esto permite que el modelo realizado pueda ser escalado posteriormente a las

dimensiones y condiciones reales. Para obtener la forma adimensional de las ecuaciones se requiere realizar una normalización apropiada, mediante cantidades características para escalar el sistema.

Tomemos L como la longitud característica, ΔT la diferencia de temperatura, $u_c = \sqrt{g\beta\Delta T L}$ la velocidad de caída libre y L/u_c como un tiempo de referencia. Usando estas escalas podemos definir las variables adimensionales como sigue

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}; \qquad t^* = \frac{t}{t_0}; \qquad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{u_c}$$
$$p^* = \frac{p}{\rho_0 u_c^2}; \qquad T^* = \frac{T - T_0}{\Delta T},$$

las ecuaciones adoptan su forma adimensional y se expresan de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \nabla^2 \mathbf{u} + T\hat{k}, \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \left(\frac{1}{PrRa}\right)^{1/2} \nabla^2 T, \tag{2.29}$$

el flujo es entonces caracterizado por dos parámetros adimensionales. El número de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha},$$

se define como la razón entre los coeficientes de difusividad cinemática y térmica, caracterizando al fluido. Si se tiene un $Pr < 1$ la transferencia de calor por conducción sera dominante en el fluido, en caso contrario $Pr > 1$ la transferencia es más eficiente por convección. El otro parámetro es el número de Rayleigh que puede definirse como la razón entre la fuerzas de flotación y viscosas, expresándose de la siguiente forma

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu\alpha}, \tag{2.30}$$

su valor se asocia a la transferencia de calor en el interior del fluido, si se tiene un valor $Ra < 1000$ la transferencia de calor será principalmente por conducción, en caso contrario, estará dada por convección. Además determina el tipo de flujo, es laminar cuando se tienen los valores de $10^3 < Ra < 10^8$ y se torna turbulento cuando supera

el valor crítico de $Ra > 10^8$ según lo reportado en [Paolucci and Chenoweth (19)] para un fluido con $Pr = 0.71$.

Capítulo 3

Desarrollo y validación

"Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione."

— John von Neumann

3.1 Métodos numéricos

Existen una gran variedad de métodos numéricos disponibles en la literatura. Estos pueden ser clasificados de una manera burda en dos grupos, globales y locales.

Las transformadas rápidas de Fourier, métodos espectrales o pseudo-espectrales entre otros, entran en la categoría de globales, estos aproximan una diferenciación en un punto a través de todos los puntos de la rejilla dentro del dominio computacional. Como ejemplo, los métodos espectrales tienen una convergencia exponencial con el refinamiento de malla para la aproximación de funciones analíticas, esto los lleva a tener una muy alta precisión pero demandan mucho poder de procesamiento. Además los métodos globales tienen una poca capacidad para resolver problemas en geometrías irregulares y con condiciones de frontera más complejas [D. C. Wan (4)]; sin embargo, han sido aplicados de manera exitosa para el estudio de fluidos y transferencia de

calor en geometrías simples, como cavidades, canales, difusores, etc. En cambio, los métodos locales para aproximar la diferenciación en un punto de la malla, utilizan la información de los puntos vecinos a este, dándoles mayor flexibilidad en el momento de la solución de ecuaciones en geometrías más complejas, esto los hace la herramienta más utilizada para solucionar problemas de la índole ingenieril [Wan et al. (23)]; sin embargo, tienen una convergencia más lenta mientras más fina sea la malla y no son tan efectivos para conseguir altas precisiones. Algunos métodos locales son: elemento finito, volumen finito, diferencias finitas, (FEM, FVM y FDM respectivamente por sus siglas en inglés).

3.1.1 Método de volumen finito

El método de volumen finito es una técnica numérica que transforma las ecuaciones diferenciales parciales que representan leyes conservativas sobre un domino en ecuaciones algebraicas discretas sobre volúmenes finitos (elementos o celdas). De una forma semejante a las diferencias finitas o elemento finito, el primer paso en el proceso de solución es la discretización del dominio geométrico, el cual, en FVM, se fracciona en elementos o volúmenes pequeños que no se superponen unos con otros. Las ecuaciones diferenciales parciales son entonces discretizadas o transformadas en ecuaciones algebraicas mediante la integración de estas sobre cada volumen. El sistema de ecuaciones es entonces resuelto calculando los valores de cada variable dependiente para cada uno de los volúmenes.

En FVM, algunos términos en las ecuaciones de conservación son transformados en flujos que pasan sobre la superficie de los volúmenes que son evaluados sobre las caras de estos. Ya que el flujo que entra en algún volumen dado es igual al flujo que sale hacia el volumen adyacente, FVM es entonces estrictamente conservativo. Esta propiedad inherente de FVM es debido al uso del Teorema de la divergencia de Gauss (2.4) para la integración de las ecuaciones gobernantes del problema, convirtiéndolo en el método preferido en CFD. Otro atributo importante del FVM es que puede ser formulado en el espacio físico sobre mallas poligonales no estructuradas. Finalmente, en FVM es bastante sencillo la implementación de diversas condiciones de frontera en una manera no invasiva, dado que las variables primitivas son evaluadas en los centroides de los volúmenes, y no sobre sus fronteras.

3.1.2 Mallas

Las locaciones discretas donde las variables serán calculadas, se encuentran definidas en una malla numérica que es una representación de la geometría del problema a resolver. La malla divide el dominio en una cantidad finita de subdominios en este caso volumenes

de control. Dependiendo de la forma de la malla se pueden clasificar en dos categorías que a su vez se subdividen en diferentes tipos dependiendo de sus propiedades. A continuación se muestra un breve listado:

- Malla estructurada (regular): consiste en un arreglo de lineas formando una cuadricula, con la propiedad de que ninguno de sus los elementos se cruzan y son ortogonales entre si. Este tipo de mallas permite identificar a sus elementos que se encuentran ordenados de forma consecutiva por los índices (i, j, k), teniendo una total similitud al sistema cartesiano. Fácilmente utilizable para problemas donde la geometría es simple y no requiere de una especial atención en ciertas áreas del dominio.

  · Malla estructurada tipo H: es semejante en sus propiedades a la malla regular, con diferencia de que la distancia entre sus volúmenes o celdas no es constante pero todavía tienen fronteras que pueden ser distinguidas mediante los puntos cardinales y mantienen su forma rectangular (Fig. 3.1). Se aplica en problemas donde se requiere una mayor resolución en ciertas áreas del dominio. Este tipo de malla será la utilizada en el desarrollo del presente trabajo.

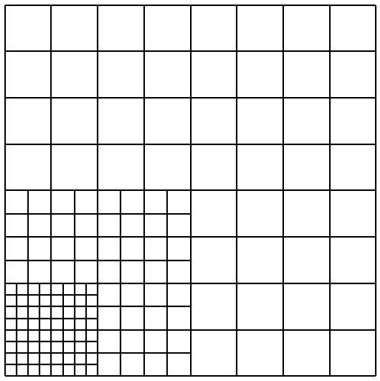


Figura 3.1: Malla estructurada no regular.

- Malla no estructurada: los volúmenes o celdas pueden tener cualquier forma, de manera que se adaptan a diferentes geometrías, por lo que una celda puede tener cualquier cantidad de celdas vecinas a diferencia de una malla estructurada (Fig. 3.2).

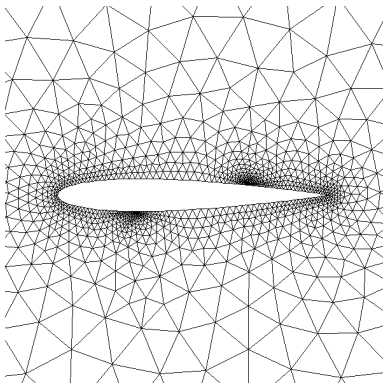


Figura 3.2: Malla no estructurada.

3.1.3 Ecuaciones de transporte

Consideremos la forma general de una ecuación de advección - difusión para una cantidad escalar ϕ

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\textit{Término temporal}} + \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{u}\phi)}_{\textit{Término convectivo}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)}_{\textit{Término difusivo}} + \underbrace{S}_{\textit{Término fuente}}, \tag{3.1}$$

donde ϕ es la variable dependiente generalizada, Γ corresponde al coeficiente de difusión generalizado y S representa al término fuente o sumidero. Definiendo de manera adecuada los parámetros de la Ec. (3.1), esta adopta la forma requerida para describir cualquier fenómeno de transporte como la transferencia de calor, masa y momento.

Las ecuaciones adimensionales de conservación descritas en el Capítulo 2 así como la de transporte en dos dimensiones, pueden ser escritas en coordenadas cartesianas de la siguiente forma, para la Ec. (3.1) tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\phi)}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + S_\phi, \tag{3.2}$$

para la conservación de masa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3.3}$$

para la conservación de momento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + f_y, \tag{3.5}$$

y para la conservación de energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{1}{PrRa}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{3.6}$$

los parámetros requeridos para que las ecuaciones de conservación tengan la forma de la ecuación de transporte se muestran en la siguiente tabla (3.1)

Ecuación	ϕ	Γ	S
Masa	1	0	0
Momento-x	u	$\left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2}$	0
Momento-y	v	$\left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2}$	f_y
Energía	T	$\left(\frac{1}{PrRa}\right)^{1/2}$	0

Tabla 3.1: Parámetros necesarios para escribir las ecuaciones gobernantes en forma de ecuaciones de transporte.

Escribir las ecuaciones de conservación en esta forma es uno de los pasos más importantes para aplicar el método de volumen finito.

3.1.4 Discretización de las ecuaciones

La discretización de las ecuaciones se obtiene integrando los términos de la Ec. (3.1) sobre cada uno de los volúmenes de control

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\phi \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial\Omega} \Gamma \nabla\phi \cdot \hat{n} dS + \int_\Omega S_\phi dV. \tag{3.7}$$

Antes de continuar, es importante comentar que para llevar acabo la discretización de los diferentes términos de la ecuación de transporte, existen diversos esquemas numéricos para la interpolación de los valores de las propiedades transportadas en el flujo a lo largo de todos los volúmenes de control, los esquemas muestran ciertas propiedades fundamentales. Las más importantes son:

- Conservación: asegura la conservación de una propiedad ϕ en todo el dominio solución, esto implica que el flujo de ϕ que sale de un volumen de control a través de una cierta cara, es igual al flujo que entra al volumen de control adyacente sobre la misma cara.
- Acotado: asegura que la solución de sistema de ecuaciones algebraicas converja.
- Transportividad: determina la dirección de influencia del flujo.

Todas las integrales de la ecuación de transporte serán aproximadas utilizando un esquema de diferencia central, de esta manera podemos llevar las ecuaciones discretas a una forma general, de esta manera la implementación de otros esquemas es más sencilla.

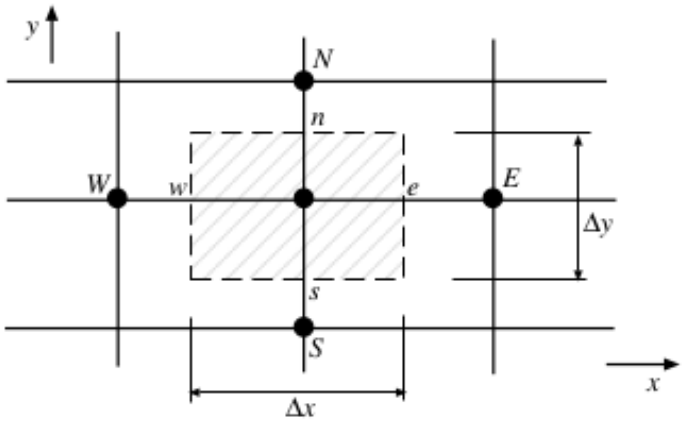


Figura 3.3: Malla de discretización por volúmenes finitos en coordenadas cartesianas.

como se puede observar en la Fig. (3.3) podemos definir el volumen de control como

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

siendo Δx y Δy, las longitudes de correspondientes en cada dirección del sistema de coordenadas cartesiano, se considera también Δz que corresponde a la longitud en esa

dirección pero es una constante muda, dado que el caso es 2D las superficies de cada volumen de control se expresan como

$$S_e = S_w = \Delta y \Delta z; \quad S_n = S_s = \Delta x \Delta z$$

Para el término temporal que corresponde al primero de la Ec. (3.7) la integración se lleva acabo de la siguiente forma

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = (\phi_P - \phi_P^0) \frac{\Delta V}{\Delta t}, \tag{3.8}$$

donde Δt corresponde al paso de tiempo que se designe, ϕ_P^0 es la variable en el centro del volumen en un tiempo anterior, en este caso la forma de la Ec. (3.8) corresponde al esquema Euler hacia atrás, el cual es utilizado en la ejecución de las simulaciones en el presente trabajo.

Mediante el uso del Teorema de Gauss (2.4), podemos integrar el término convectivo de la siguiente manera

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) dV = (u)_e S_e \phi_e - (u)_w S_w \phi_w + (v)_n S_n \phi_n - (v)_s S_s \phi_s. \tag{3.9}$$

Realizando una interpolación lineal para calcular el valor ϕ en las caras del volumen (e, w, n, s), se obtiene

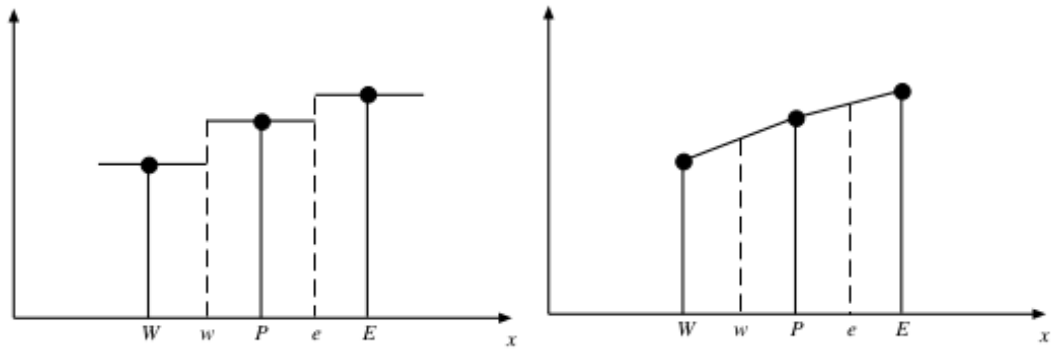
$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}; \qquad \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}$$
$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2}; \qquad \phi_s = \frac{\phi_S + \phi_P}{2}.$$

En general el término convectivo en las ecuaciones de momento requiere un esquema numérico diferente para ser calculado, ya que constituye la parte no lineal y una aproximación no adecuada puede llevar resultados físicos erróneos. Se seleccionó el esquema upwind para el tratamiento a este término en el desarrollo de este trabajo, por el momento esta aproximación es suficiente para realizar la discretización.

El término difusivo es calculado de forma análoga al convectivo

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e S_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e S_e + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n S_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s S_s, \tag{3.10}$$

en donde para poder evaluar las derivadas de ϕ se requiere hacer una suposición respecto de la variación de ϕ en el volumen de control.



(a) **(b)**

Figura 3.4: Funciones de interpolación de la derivada en las caras del volumen. a) Paso constante. b) Paso lineal.

La Fig. (3.4) muestra dos posibles suposiciones (las más simples), es evidente que la suposición de un paso constante no es buena ya que las derivadas en los puntos w y e no están definidas, ocurre de la misma manera en la dirección y. Utilizando la suposición de un paso lineal las derivadas tienen los siguientes valores

$$\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e = \Gamma\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x}; \qquad \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w = \Gamma\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x},$$

$$\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n = \Gamma\frac{\phi_N-\phi_P}{\delta y}; \qquad \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s = \Gamma\frac{\phi_P-\phi_S}{\delta y},$$

el coeficiente Γ puede llegar a ser función de las variables primitivas, por lo que una aproximación seria requerida, pero en nuestro caso es considerada constante.

La integral del término fuente resulta

$$\int S dV = \bar{S}_P \delta V, \tag{3.11}$$

$\bar{S}_P$ representa el valor promedio dentro del volumen de control.

Obtenidas las aproximaciones de todos los términos de la ecuación general de transporte (3.1) podemos escribirla en su forma discreta

$$(\phi_P - \phi_P^0)\frac{\delta V}{\delta t} + (u)_e S_e \left(\frac{\phi_E + \phi_P}{2}\right) - (u)_w S_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2}\right) + (u)_n S_n \left(\frac{\phi_N + \phi_P}{2}\right) - (u)_s S_s \left(\frac{\phi_S + \phi_P}{2}\right) + \left(\Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x}\right) S_e = \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x}\right) S_w + \left(\Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y}\right) S_n - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y}\right) S_s + \bar{S}_P \Delta V. \tag{3.12}$$

La implementación de FVM conlleva a un sistema de ecuaciones lineales que de forma general pueden ser expresadas como

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P \Delta V, \tag{3.13}$$

es usual referirse a la expresión anterior como ecuación de balance, donde los coeficientes a son los siguientes

$$a_E = \Gamma \frac{S_e}{\Delta x} - \frac{(u)_e S_e}{2},$$
$$a_W = \Gamma \frac{S_w}{\Delta x} - \frac{(u)_w S_w}{2},$$
$$a_N = \Gamma \frac{S_n}{\Delta y} - \frac{(v)_n S_n}{2},$$
$$a_S = \Gamma \frac{S_s}{\Delta y} - \frac{(v)_e S_s}{2},$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\delta V}{\delta t},$$

$$S_P = \phi_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} + \bar{S_P} \Delta V.$$

Es fácil observar que la ecuación de balance (3.13) puede ser expresada

$$a_P \phi_P = \sum_i a_i \phi_i + b,$$

donde i es un subíndice que identifica los puntos de la malla vecinos a P en las direcciones (x, y, z) dependiendo de la dimensionalidad del problema.

Resolver el sistema de ecuaciones lineales generado mediante la Ec. (3.13) lleva a la aproximación de la ecuación diferencial.

3.1.5 Implementación numérica de las condiciones de frontera

Un concepto importante es el buen planteamiento del problema. Se dice que una ecuación diferencial parcial se encuentra bien planteada cuando existe una única solución que depende continuamente de los datos iniciales. Para cumplir con lo anterior, se deben satisfacer condiciones de frontera que se cumplen en el dominio para todo tiempo y condiciones iniciales, las cuales son dadas en un tiempo fijo o inicial.

Condiciones de Dirichlet

Consideremos que ϕ_w es el valor conocido de la variable en la frontera oeste del dominio. En la ecuación discreta para todos los volúmenes adyacentes a la frontera, el valor de ϕ_W es interpolado a través de ϕ_w

$$\phi_w \approx \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \rightarrow 2\phi_w - \phi_P, \tag{3.14}$$

sustituyendo en la Ec. (3.13) tenemos

$$a_P^* \phi_P = a_E \phi_E + a_W^* \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P^*, \tag{3.15}$$

donde

$$a_P^* = a_P + a_W; \qquad a_W^* = 0; \qquad S_P^* = S_P + 2a_W \phi_f.$$

Condiciones de Neumann

En este caso la derivada normal ϕ'_w es conocida en la frontera. El valor de ϕ_W es interpolado de la siguiente manera

$$\phi'_w = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \approx \frac{\phi_W - \phi_P}{\Delta x} \rightarrow \phi_W = \phi_P + \phi'_w \Delta x, \tag{3.16}$$

sustituyendo en la Ec. (3.13) se tiene

$$a_P^* \phi_P = a_E \phi_E + a_W^* \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P^*, \tag{3.17}$$

donde

$$a_P^* = a_P - a_W; \qquad a_W^* = 0; \qquad S_P^* = S_P + 2a_W\phi'_w\Delta V.$$

3.2 Algoritmos de solución

Teniendo la versión discretizada de las ecuaciones de la dinámica de fluidos, ocupamos una estrategia para resolver las ecuaciones acopladas.

En estas ecuaciones el término fuente corresponde al gradiente de presión, el cual es, en forma general, desconocido al interior del campo de flujo, y por tanto, constituye una incógnita más del problema. La presión, las dos componentes de la velocidad y la temperatura corresponden a cuatro incógnitas que se resuelven con las componentes de la ecuación de cantidad de momento. El procedimiento es iterativo y consiste en suponer un campo de presiones, resolver las velocidades a partir de la ecuación de movimiento y verificar que estas satisfagan la ecuación de continuidad [González (10)].

3.2.1 Malla alternada o staggered

Consideremos el gradiente de presión en dirección vertical $-\frac{\partial \hat{p}}{\partial y}$. La presión motriz corresponde a $\hat{p} = p + \rho g h$, donde p es la presión termodinámica y h la altura respecto al eje vertical. Integrando el gradiente de p sobre el volumen

$$\int_s^n -\frac{\partial \hat{q}}{\partial y} dy = -(p_n - p_s), \tag{3.18}$$

suponiendo una variación lineal en p entre los nodos se obtiene

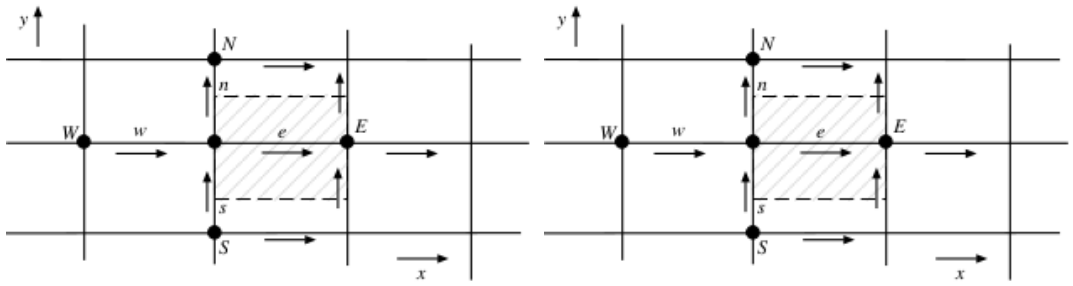
$$p_n = \frac{p_N + p_P}{2}; \qquad p_s = \frac{p_S + p_P}{2}, \tag{3.19}$$

de donde

$$-(p_n - p_s) = \frac{p_S - p_N}{2}. \tag{3.20}$$

El resultado anterior tiene varias implicaciones. Por un lado la presión es calculada sobre una malla más gruesa. Por otro, variaciones de importancia en el valor de la presión entre nodos, como las que ocurren cuando el cálculo numérico se vuelve inestable, no es percibido por el algoritmo de cálculo como variaciones importantes en el gradiente de

presión. Algo semejante puede ocurrir al discretizar la ecuación de continuidad sobre la misma malla.



(a) **(b)**

Figura 3.5: Malla alternada o staggered. a) Para la velocidad en x. b) Para la velocidad en y.

Para evitar este problema se ideó la malla alternada o staggered (Fig. 3.5). La presión se define en los nodos de la malla, las velocidades se especifican en las caras del volumen de control en torno a los nodos.

La ecuación discreta para la cantidad de movimiento en la dirección vertical, en este se tiene

$$a_n u_n = \sum_i a_i u_i + b + (p_P - p_N) S_n, \tag{3.21}$$

se pueden escribir ecuaciones similares para los otros componentes de la velocidad.

Conocidas las presiones p_i, la solución de las ecuaciones algebraicas anteriores permite conocer u y v. Pero durante el proceso iterativo de solución del problema compuesto para la presión y las velocidades, la presión se conoce solo de forma imprecisa. Sea p_i^* tal presión, el resultado aproximado para el campo de velocidades u^* es

$$a_n u_n^* = \sum_i a_i u_i^* + b + (p_P^* - p_N^*) S_n, \tag{3.22}$$

esto implica que para esta presión la solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento conduce a velocidades imprecisas u_i^* y v_i^*, las cuales no satisfacen la ecuación de continuidad.

Sean p' y u' correcciones de la presión y de la velocidad tales que

$$p = p^* + p'; \qquad u = u^* + u', \tag{3.23}$$

restando las Ec. (3.21) y (3.22)

$$a_n u'_n = \sum_i a_i u'_i + b + (p'_P - p'_N) S_n. \tag{3.24}$$

Simplificaciones en el termino $\sum_i a_i u'_i$ definen una serie de métodos con nombres basados en el nombre raíz SIMPLE (Semi Implicit Pressure Linked Equations), método originalmente propuesto por Patankar [Versteeg and Malalasekera (22)].

3.2.2 Algoritmo PISO

Este algoritmo desarrollado por Issa en 1986 [Issa (14)], es un procedimiento de cálculo para el acoplamiento de presión-velocidad, el cual se estableció inicialmente como un algoritmo para la solución no iterativa de problemas de flujo compresibles transitorios. Posteriormente se adaptó para problemas en estado permanente como un procedimiento iterativo. El algoritmo PISO utiliza un paso para predecir (predictor) los valores de las variables de interés y dos pasos para corregir (corrector). El algoritmo puede ser visto como una extensión del algoritmo SIMPLE más un paso de corrección [Xamán and Gijón-Rivera (24)].

El algoritmo iterativo PISO se puede resumir en los siguientes pasos:

- Estimar el campo de presión p^*
- Resolver las ecuaciones de momento para obtener u^* y v^*.
- Resolver la ecuación de corrección de presión para obtener p'.
- Utilizar el campo de corrección de presión p' para corregir el campo de presiones y las componentes de velocidades p^{**}, u^{**} y v^{**}.
- Resolver la segunda ecuación de corrección de presión p''.
- Usar el campo de la segunda corrección de presión para corregir las componentes de las velocidades y la presión, u^{***}, v^{***} y p^{***}.
- Agrupar $u = u^{***}$, $v = v^{***}$ y $p = p^{***}$.
- Resolver otras ecuaciones de conservación como la de la energía en nuestro caso.
- Aplicar el criterio de convergencia. Si se cumple, se imprimen los resultados y se concluye la solución numérica. En caso contrario se continua con el proceso iterativo.

- Finalmente, en caso de continuar con el proceso, la presión p pasa a ser la presión estimada p^* y se repite el algoritmo.

Este algoritmo será el utilizado en el desarrollo del presente trabajo.

3.3 Validación del código

En 1973 se propone una forma de verificación de los algoritmos solución para los problemas de transporte, la cual consiste en resolver un ejercicio propuesto por Jones en 1973 [I. P. Jones (12)] conocido como cavidad de flotación (buoyancy-driven cavity). Este ejercicio ha sido usado para probar y validar diversos códigos computacionales utilizados en una gran diversidad de problemas, como captación de energía solar, ventilación de cuartos e incluso aislamiento de reactores nucleares [de Vahl Davis (5)].

Para verificar el algoritmo, la primer referencia es el trabajo de Vahl Davis y Jones [De Vahl Davis et al. (6)] en el cual se resumen los resultados (benchmark) obtenidos por los diferentes grupos de científicos que se dedicaron a resolver este problema a inicios de los años ochentas. Otra cita obligada es un artículo del mismo Vahl Davis en el que resuelve las ecuaciones gobernantes de este problema en una forma de vorticidad de flujo, fueron resueltas usando el algoritmo ADI (Alternating Direction Implicit) para un Rayleigh $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ [de Vahl Davis (5)].

Desde entonces se han desarrollado nuevos conjuntos de benchmarks que mejoran la calidad de los datos y extienden sus estudios a Rayleigh de 10^8, como lo es el trabajo de Won y Patnaik [D. C. Wan (4)], en el que utilizan dos métodos numéricos independientes. Uno es una aproximación DSC (Discrete Singular Convolution). Mientras que el otro es una forma estándar del método de Galerkin de elemento finito. La integración de las ecuaciones se lleva acabo mediante el empleo de esquemas de corrección en la velocidad. Este último trabajo será usado para la validación de nuestro código en OpenFOAM®, haciendo una comparación cuantitativa y cualitativa de los resultados.

3.3.1 Cavidad de flotación

La cavidad de flotación es un problema bidimensional con una geometría cuadrada, en el que las paredes verticales cuentan con una diferencia de temperatura, las horizontales son adiabáticas, dentro de la cavidad se considera un fluido el cual acepta la aproximación de Boussinesq, con un Prandtl de 0.71 que corresponde al aire y siendo la gravedad la única fuerza de cuerpo que actúa sobre el fluido.

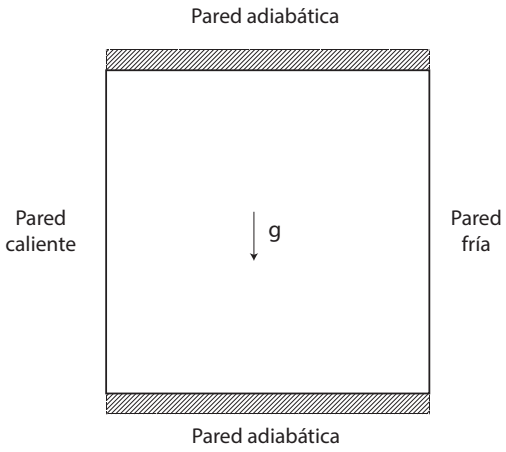


Figura 3.6: Esquema de la cavidad de flotación.

Las condiciones de frontera para la temperatura son del tipo Neumann $\partial T/\partial y = 0$ para las paredes horizontales y Dirichlet para las verticales con $T_H = 1$ en la pared izquierda y $T_C = 0$ en la derecha; mientras que para la velocidad se tiene la condición de no deslazamiento en todas las paredes esto es $u = v = 0$. Respecto a las condiciones iniciales, se tiene $\mathbf{u} = 0$ para la velocidad, $p = 0$ para la presión y $T = 0$ para la temperatura.

Las ecuaciones a resolver son las Ec. (3.3), (3.4) y (3.5) que corresponden a la ecuación de continuidad, conservación de momento y energía en su forma adimensional y en coordenadas cartesianas respectivamente, mediante un esquema Euler para el término temporal, upwind para el convectivo e interpolaciones lineales para el difusivo y el término fuente.

3.3.2 Estudio de la convergencia

El análisis de la convergencia resulta importante para establecer la confiabilidad de las soluciones arrojadas por los algoritmos. Para hacer el estudio de la convergencia, es necesario el cálculo del error numérico, que se define como la diferencia entre una solución aproximada y la solución analítica, pero en una gran cantidad de casos esta no existe, como para el presente estudio, por lo que se realiza una estimación, la cual se define, como la diferencia entre los residuos de dos sucesivas iteraciones de alguna variable ya sea ($\mathbf{u}$, T y p), por lo que puede ser calculada:

$$E_n = max|\eta_{n+1} - \eta_n| \tag{3.25}$$

donde η es una de estas variables primitivas y n el número de iteración. Este cálculo no sólo nos brinda el tamaño del error, sino que también nos arroja el rango de convergencia. Además se debe de cumplir el criterio de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), el cual es una condición necesaria para determinar la estabilidad de la solución numérica, establece que dada una discretización espacial, el paso de tiempo necesita ser lo suficientemente pequeño de manera que la información tenga el tiempo suficiente para propagarse a través del espacio discretizado [Courant et al. (2)]. Puede ser calculado este parámetro (número de Courant) mediante

$$C = \Delta t \sum_i \frac{u_i}{\Delta x_i} \leq C_{max} \tag{3.26}$$

C_{max} es el valor máximo permitido, pero este cambia dependiendo del método numérico utilizado, típicamente $C_{max} = 1$; manteniendo el valor C menor a 1 se garantiza una estabilidad numérica.

Una de las formas para reducir el error de cálculo, es mediante el refinamiento de malla. Para ejemplificar, se realizó una simulación con una malla de 41x41, y se compararon los resultados con los obtenidos con un mallado de 161x161, ambos realizados para un Rayleigh de $Ra = 10^5$ y utilizando un paso de tiempo $\Delta t = 10^{-4}$. Se cotejo la componente vertical de la velocidad y temperatura a lo largo del eje x a una altura de $y = 0.5$ (tabla 3.2).

	41x41		161x161	
Coordenada-x	v	T	v	T
0.0	0.0	1	0.0	1.0
0.1	58.9333	0.5996	59.47060	0.595224
0.2	16.4727	0.471928	14.49880	0.471173
0.3	0.982139	0.476701	0.01219	0.479915
0.4	-0.912858	0.492233	-1.13848	0.49409
0.5	0.00015547	0.500001	-0.00001	0.5
0.6	0.913058	0.507769	1.13846	0.505909
0.7	-0.982164	0.5233	-0.01221	0.520084
0.8	-16.4728	0.528072	-14.49880	0.528826
0.9	-58.9334	0.400399	-59.47050	0.404775
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabla 3.2: Sensibilidad de malla en OpenFOAM®.

Los valores de T no difieren mucho entre malla y malla, lo que nos muestra que las distribuciones de la temperatura son congruentes, en el caso de la velocidad existe una discrepancia en función de la cantidad de nodos que se tienen en cada malla. La Fig. (3.7), muestra los perfiles de velocidad para la componente vertical en 100 puntos a lo largo del eje x para ambos casos, estos valores se obtuvieron mediante una interpolación lineal.

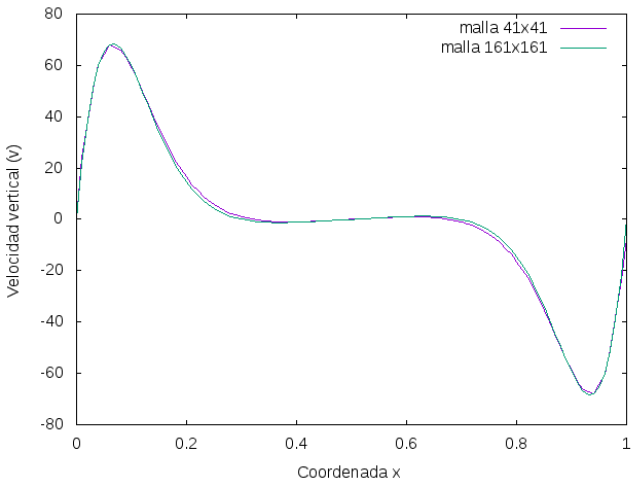


Figura 3.7: Gráfica de sensibilidad de mallas.

En ambos casos se estableció un criterio de convergencia $E = 10^{-8}$. En la Fig. (3.8) se muestra el historial de convergencia para el caso de la malla 161x161.

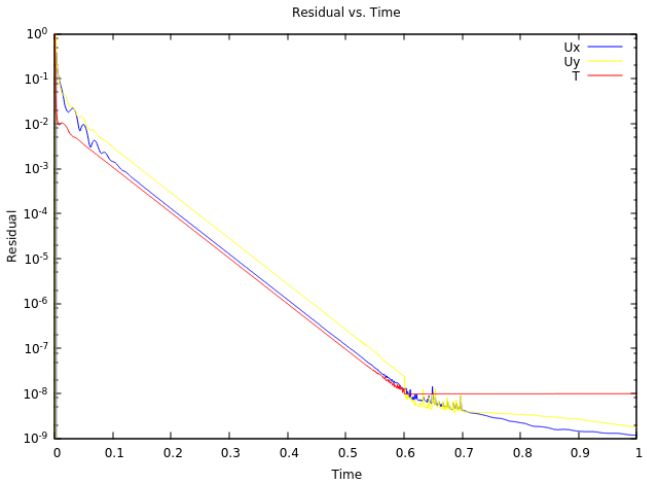


Figura 3.8: Historial de convergencia para u, v y T mediante OpenFOAM®. Residual (E) vs Tiempo.

Los resultados obtenidos en la simulación del caso anterior con una malla 161x161 fueron comparados con los valores de la componente vertical de la velocidad así como los de la temperatura, a una altura de $y = 0.5$ a lo largo del eje x, con los datos obtenidos por Won y Patnaik [D. C. Wan (4)] con el método de DSC, bajo las mismas

condiciones de malla y valor de Rayleigh. Los valores son resumidos en la tabla (3.3)

	DSC		OpenFOAM®	
Coordenada-x	v	T	v	T
0.0	0.0	1.0	0.0	1.0
0.1	63.25311	0.59351	59.47060	0.595224
0.2	16.22780	0.46987	14.49880	0.471173
0.3	-0.64985	0.48355	0.01219	0.479915
0.4	-1.82631	0.49772	-1.13848	0.49409
0.5	-0.00378	0.49968	-0.00001	0.5
0.6	1.81886	0.50165	1.13846	0.505909
0.7	0.63937	0.51583	-0.01221	0.520084
0.8	-16.24279	0.52952	-14.49880	0.528826
0.9	-63.23259	0.40597	-59.47050	0.404775
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabla 3.3: Comparativa de datos obtenidos por los métodos DSC y OpenFOAM®.

examinando las variables en el punto $(0.5, 0.5)$ que corresponde al centro de la cavidad, ambos métodos arrojaron un valor de $T \approx 0.5$, que corresponde al equilibrio térmico del sistema; y $v \approx 0.0$, valor que nos indica que el punto $(0.5, 0.5)$ es el centro del vórtice generado por la dinámica del fluido, siendo ambos resultados esperados.

3.3.3 Distribución de velocidad

En la tabla (3.3) no se observan diferencias significativas en la temperatura, pero si en la componente vertical de la velocidad, esto no necesariamente implica un error en la simulación, si no que, nos puede determinar que los valores de la velocidad no concuerdan entre un método y otro en ciertos puntos del dominio geométrico.

El estudio de la distribución de las velocidades es entonces importante. Para realizarlo, se graficaron los datos obtenidos mediante OpenFOAM® correspondientes a la componente vertical de la velocidad v, en $y = 0.5$ y a largo del eje x, y horizontal en $x = 0.5$ sobre el eje y, para diferentes casos en un rango de Rayleigh $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, con un mallado de 101x101. Las Figs. (3.9) y (3.11) son los perfiles de velocidad reportados por

Won y Patnaik [D. C. Wan (4)] mediante los métodos FEM y DSC aunadas a la distribución obtenida por Massarotti en [Massarotti et al. (17)] mediante el método CBS (Characteristic-Based-Split); las Figs. (3.10) y (3.12) corresponden a las simulaciones realizadas mediante OpenFOAM®

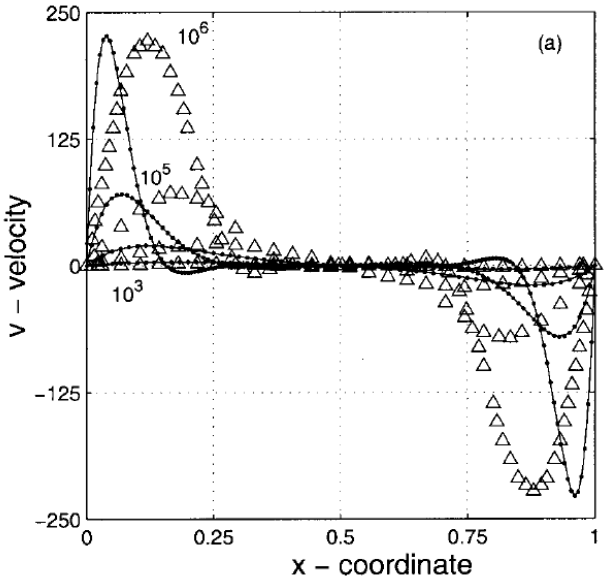


Figura 3.9: Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—) y CBS ($\Delta\Delta\Delta$).

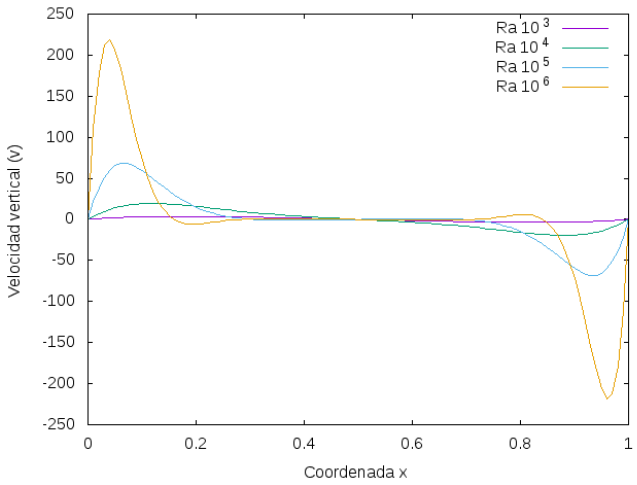


Figura 3.10: Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ obtenidos mediante OpenFOAM®.

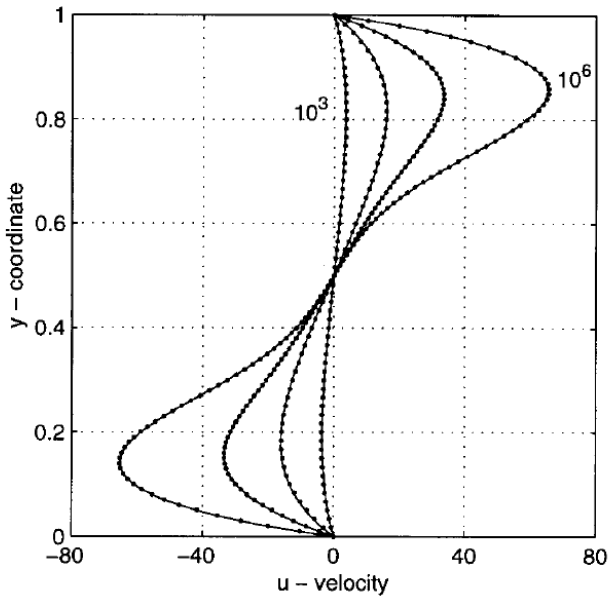


Figura 3.11: Perfil de velocidades de la componente horizontal para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—).

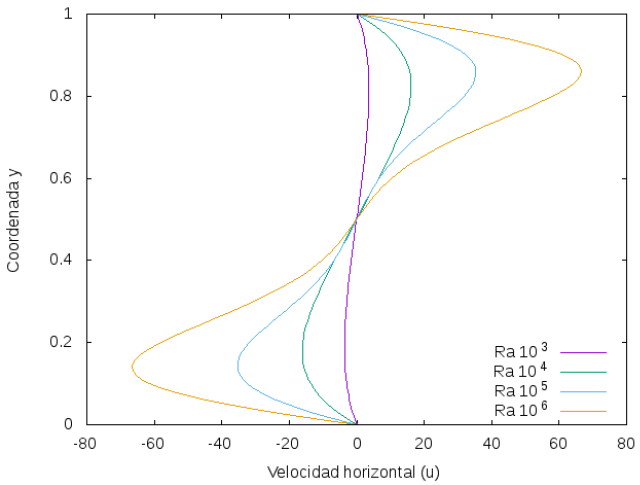


Figura 3.12: Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ obtenidos mediante OpenFOAM®.

Con el fin de verificar la capacidad del código, el presente estudio se extiende a un rango Rayleigh $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ donde el flujo todavía se comporta como laminar y siendo $Ra > 10^8$ un valor critico para la transición a un flujo turbulento.

A un valor mayor de Rayleigh, mayor transferencia de calor, esto implica un incremento en la velocidad en el fluido. Para lograr que las simulaciones arrojen resultados correctos, el paso de tiempo se fijo en $\Delta t = 10^{-5}$ y se refino la malla a 401x401, esto para mantener el número de Courant menor que 1 y asegurar la convergencia.

En las Figs. (3.13 - 3.16) se muestran los perfiles de velocidad de la componente vertical y horizontal reportadas por Won y Patnaik [D. C. Wan (4)] y las obtenidas mediante FVM, para el rango de Rayleigh $10^7 \leq Ra \leq 10^8$.

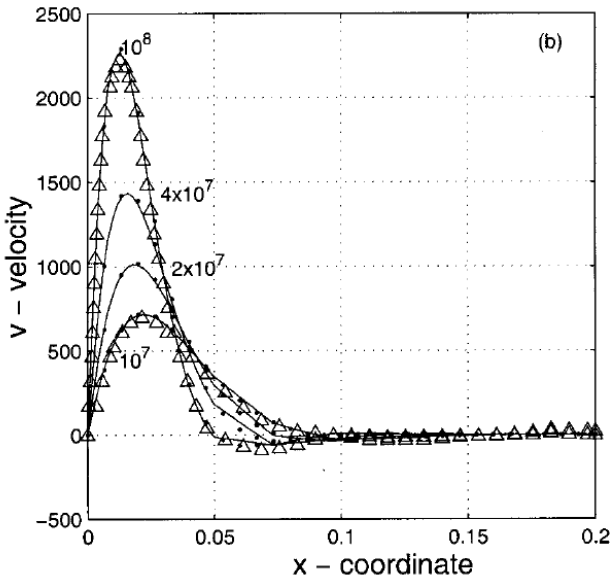


Figura 3.13: Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—), CBS ($\Delta\Delta\Delta$).

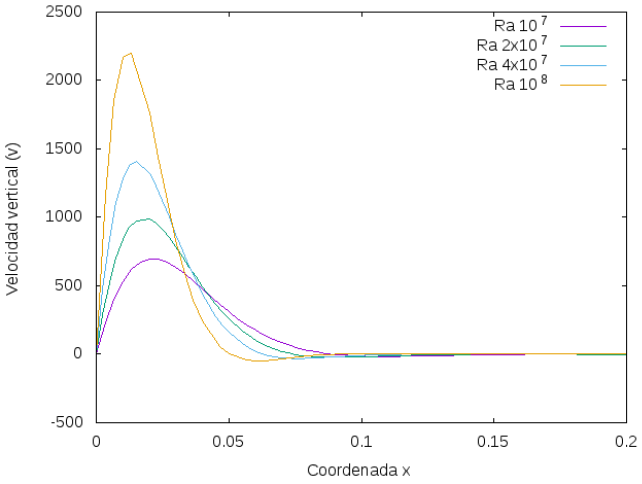


Figura 3.14: Perfil de velocidades de la componente vertical para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ obtenidos mediante OpenFOAM®.

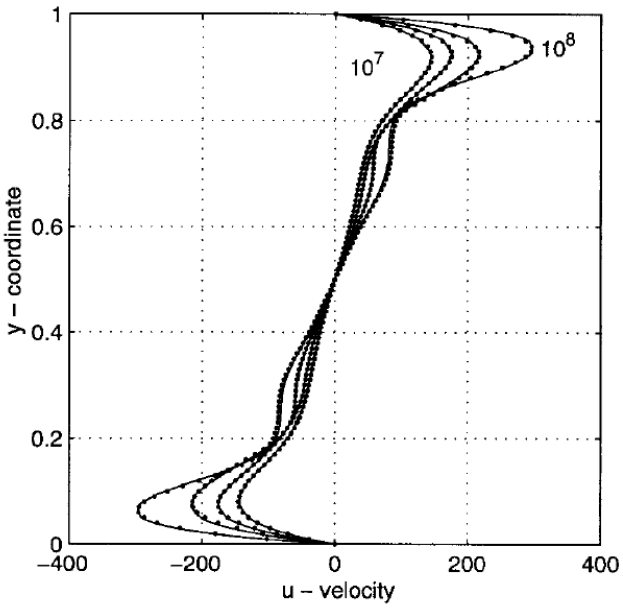


Figura 3.15: Perfil de velocidades de la componente horizontal para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ reportados en [D. C. Wan (4)]; DSC ($\cdots$), FEM (—).

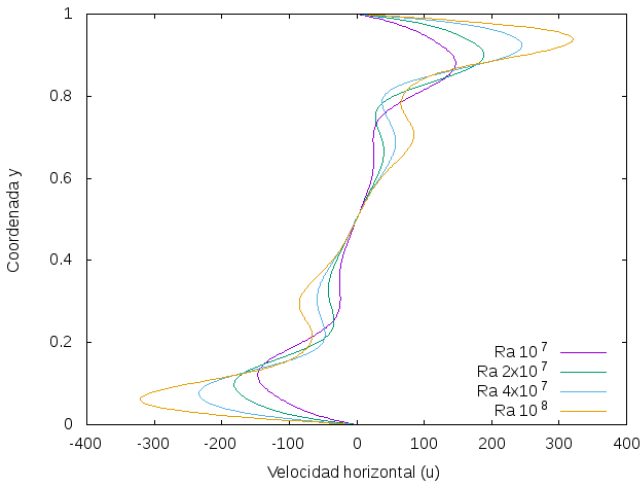


Figura 3.16: Perfil de velocidades de la componente horizontal para los casos con $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ obtenidos mediante FVM.

De las Figs. (3.13) y (3.14), observamos que para $Ra \geq 10^7$, la velocidad es mucho mayor que para un $Ra \leq 10^6$, manteniéndose confinada a las paredes.

En la Fig. (3.9) la distribución de velocidad obtenida mediante el método CBS no coincide completamente con las distribuciones de velocidad obtenidas por los otros métodos, pero coincide en el valor máximo. Una comparación sobre los máximos de las componentes horizontal y vertical de la velocidad es entonces importante. En la tabla (3.4) se muestran los valores máximos de las componentes de la velocidad obtenidos por diferentes métodos numéricos.

Ra	Máximo	ADI	CBS	FEM	DSC	OpenFOAM®
10^3	v	3.679	3.692	3.686	3.368	3.669
	u	3.634	-	3.489	3.643	3.621
10^4	v	19.51	19.63	19.79	19.98	19.469
	u	16.2	-	16.122	15.967	16.142
10^5	v	68.22	68.85	70.63	70.81	68.190
	u	34.81	-	33.39	33.51	35.336
10^6	v	216.75	221.6	227.11	227.24	218.359
	u	65.33	-	65.40	65.55	66.638
10^7	v	-	702.3	714.48	714.47	694.846
	u	-	-	143.56	145.06	146.422
$2x10^7$	v	-	-	995.33	1017.84	986.333
	u	-	-	175.28	175.22	188.935
$4x10^7$	v	-	1417	1435.5	1419.84	1406.54
	u	-	-	216.85	216.67	245.004
10^8	v	-	-	2223.44	2259.08	2198.88
	u	-	-	296.71	295.67	320.536

Tabla 3.4: Comparación de los máximos de las componentes vertical y horizontal de la velocidad por los diferentes métodos (ADI, CBS, FEM, DCS y OpenFOAM®).

3.3.4 Transferencia de calor

Conocer la razón en la que el calor se transfiere a lo largo de la superficies de contacto es de sumo interés para problemas de diseño, ya que es el parámetro que se busca

maximizar o minimizar según sea el caso. El número de Nusselt (Nu) representa un parámetro adimensional, que determina el coeficiente de transferencia de calor desde una superficie hacia el fluido. Este coeficiente Nu_{local} puede ser calculado de la siguiente forma

$$Nu_{local} = \pm \frac{\partial T}{\partial x} \mid_{pared}, \tag{3.27}$$

y el $\overline{Nu}$ (Nusselt promedio) mediante la integral:

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu_{local} dy. \tag{3.28}$$

Un Nusselt negativo, implica que la transferencia de calor es de la superficie de contacto hacia el fluido, y un *Nusselt* positivo el caso contrario.

Se calculó y graficó el Nusselt en las paredes verticales. La distribución de Nu_{local} tanto para la pared caliente como para la fría reportadas por Won y Patnaik en [D. C. Wan (4)], así como las obtenidas mediante OpenFOAM®. Para los casos de Rayleigh $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ se muestran en las Figs. (3.17 - 3.20)

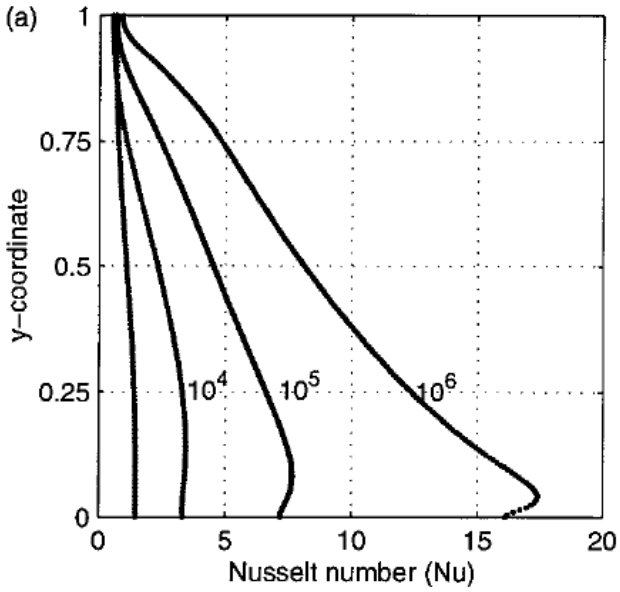


Figura 3.17: Distribución del Nu_{local} en la pared caliente reportada por Won y Patnaik en [D. C. Wan (4)]; DSC.

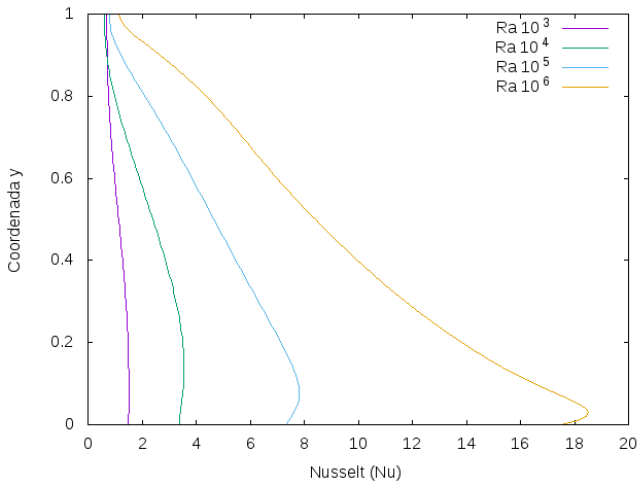


Figura 3.18: Distribución del Nu_{local} en la pared caliente; OpenFOAM®.

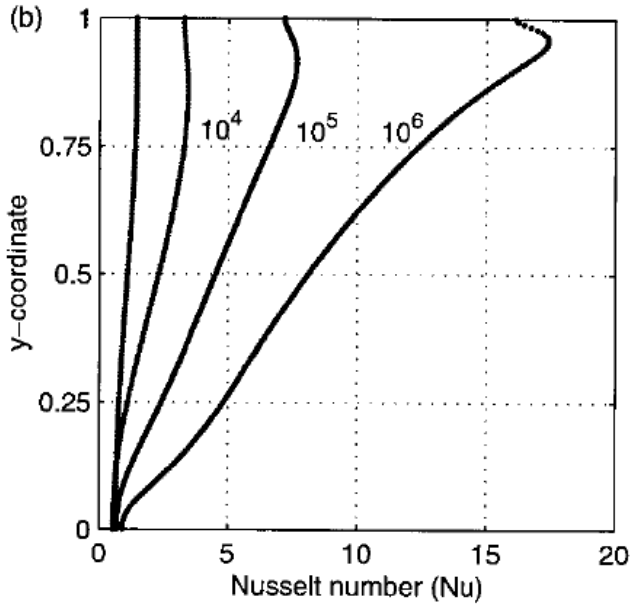


Figura 3.19: Distribución del Nu_{local} en la pared fría reportada por Won y Patnaik en [D. C. Wan (4)]; DSC.

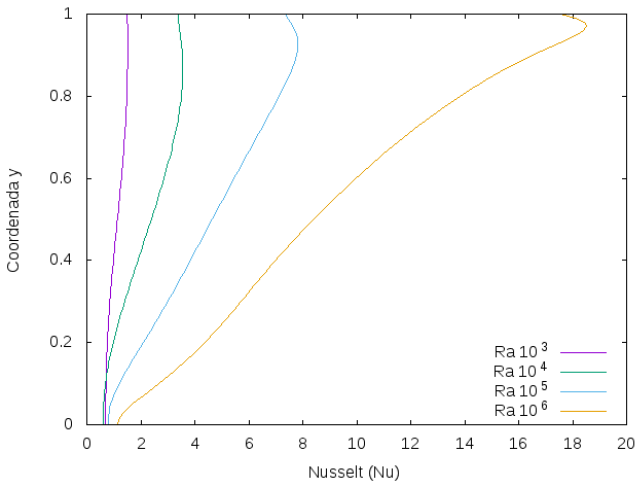


Figura 3.20: Distribución del Nu_{local} en la pared fría; OpenFOAM®.

Para el cálculo de este parámetro, se desarrolló un código en OpenFOAM® capaz de computar el Nu_{local} para posteriormente integrarlo sobre las paredes y asi obtener el $\bar{Nu}$. Esta es una de las ventajas del uso de OpenFOAM®, que nos permite desarrollar herramientas propias con propósitos diversos como en este caso para el post-procesamiento de datos.

En la Fig. (3.18) se observa un mayor Nusselt en la parte baja de la pared, región donde el fluido absorbe la mayor cantidad de calor, disminuyendo su densidad, esto genera que el fluido contiguo de menor temperatura y por tanto más denso ejerza una presión mayor que la que se tiene en la parte superior de la cavidad, esta diferencia de presiones da lugar a una fuerza de flotación, que eleva al fluido caliente, la absorción de calor del fluido disminuye conforme este se acerca al equilibrio térmico con la pared caliente, esto se traduce en un decremento del Nu_{local} en función de la altura, concordando con lo mostrado en la Fig. (3.18). Cuando el fluido caliente entra en contacto con la parte superior de la pared fría, este cede calor, haciéndose más denso y descendiendo por acción de la gravedad, en el recorrido desde la parte superior de la pared fría hasta el fondo de la cavidad, el fluido se va aproximando al equilibrio térmico, por tanto el Nu_{local} decrece hacia la parte baja de la pared como se muestra en la Fig. (3.20).

Las distribuciones del Nusselt local para Rayleigh de $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ muestran semejanza a las obtenidas en el rango $10^3 \leq Ra \leq 10^6$, un resultado esperado mientras exista un estado estacionario. Las gráficas se muestran en las Figs. (3.21) y (3.22).

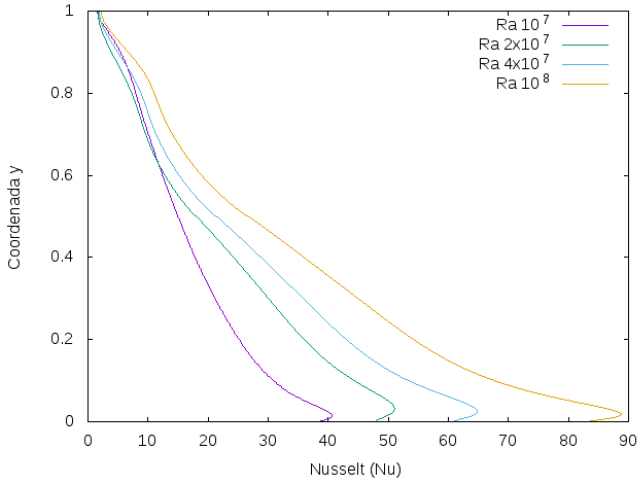


Figura 3.21: Distribución del Nu_{local} para los casos con Rayleigh de $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ en la pared caliente; OpenFOAM®.

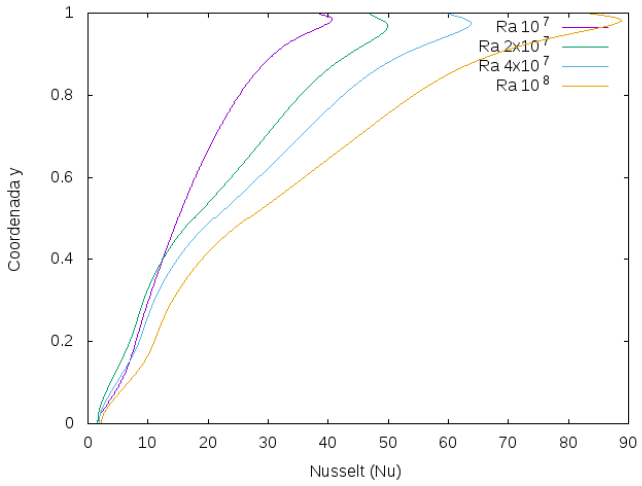


Figura 3.22: Distribución del Nu_{local} para los casos con Rayleigh de $10^7 \leq Ra \leq 10^8$ en la pared fría, OpenFOAM®.

Análogamente al estudio de las distribución de las velocidades, se realizó un estudio cuantitativo entre el Nu_{local} máximo, mínimo y $\overline{Nu}$, los valores son resumidos en la tabla (3.5).

Ra	Nu	ADI	CBS	FEM	DSC	OpenFOAM®
	Max.	1.50	-	1.501	1.444	1.503
10^3	Min.	0.692	-	0.691	0.665	0.698
	Promedio	1.12	1.117	1.117	1.073	1.121
	Max.	3.53	-	3.579	3.441	3.553
10^4	Min.	0.586	-	0.577	0.528	0.601
	Promedio	2.243	2.243	2.254	2.155	2.25
	Max.	7.71	-	7.945	7.662	7.824
10^5	Min.	0.729	-	0.698	0.679	0.782
	Promedio	4.52	4.521	4.598	4.352	4.557
	Max.	17.92	-	17.86	17.39	18.512
10^6	Min.	0.989	-	0.9132	0.903	1.259
	Promedio	8.8	8.806	8.976	8.632	9.011
	Max.	-	-	38.6	31.02	40.685
10^7	Min.	-	-	1.298	0.977	1.580
	Promedio	-	16.4	16.656	13.86	16.704
	Max.	-	-	48.84	39.343	51.030
$2x10^7$	Min.	-	-	1.437	1.106	1.690
	Promedio	-	-	19.97	15.46	21.269
	Max.	-	-	61.69	49.908	64.869
$4x10^7$	Min.	-	-	1.59	1.245	1.902
	Promedio	-	-	23.96	18.597	25.638
	Max.	-	-	91.16	68.73	88.797
10^8	Min.	-	-	1.766	1.428	2.218
	Promedio	-	-	31.486	23.67	32.585

Tabla 3.5: Comparativa del número de Nusselt Nu obtenido por los diferentes métodos descritos en esta sección.

El estudio cuantitativo revela que existe una buena correspondencia en la predicción del $\overline{Nu}$ por los diversos métodos; sin embargo, existen diferencias significativas entre OpenFOAM® y el método DSC, estas se dan en el rango de Rayleigh $10^7 \leq Ra \leq 10^8$.

Un comportamiento lineal para el Nusselt promedio como función del Rayleigh en una gráfica *log-log* se muestra en la Fig. (3.23).

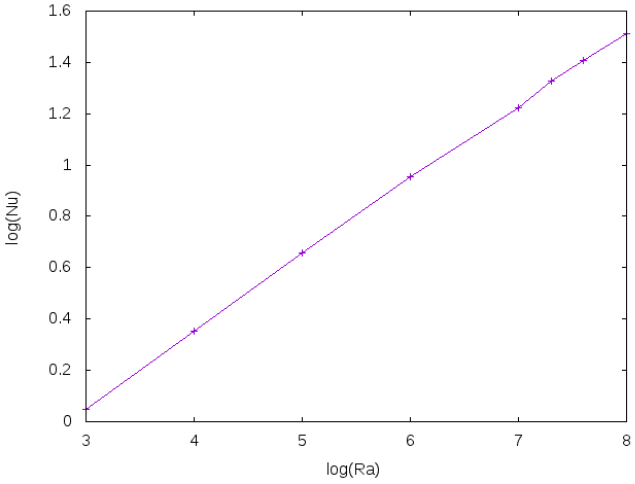


Figura 3.23: $log_{10}(\overline{Nu})$ vs $log_{10}(Ra)$.

la correlación para el Nusselt como función del Rayleigh, puede ser determinada por el ajuste lineal

$$log_{10}(Nu) = 0.2934 log_{10}(Ra) - 0.8233, \tag{3.29}$$

ó

$$Nu = 0.1502 Ra^{0.2934}, \tag{3.30}$$

la expresión anterior puede ser comparada con la obtenida por Berkovsky y Polevikov (1977):

$$Nu_r = 0.18 \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra \right)^{0.29}. \tag{3.31}$$

que para el $Pr = 0.71$ utilizado en este estudio nos da:

$$Nu_r = 0.1675 Ra^{0.29}. \tag{3.32}$$

El error relativo entre las ecuaciones (3.30) y (3.32) es

$$\epsilon = \frac{Nu_r - Nu}{Nu_r} = 1 - 0.8967 Ra^{0.0034}, \tag{3.33}$$

para el intervalo de estudio en el presente trabajo $10^3 \leq Ra \leq 10^8$ el error porcentual relativo está entre $4.5\,\% \geq \epsilon \geq 8.2\,\%$.

Aunque existen discrepancias significativas del Nusselt promedio obtenido por el método DSC y OpenFOAM®, el resto del análisis cuantitativo muestra una gran precisión en los resultados obtenidos por medio de las librerías OpenFOAM® y una gran semejanza con FEM dada la similitud de ambos métodos. En resumen, los cálculos reportados en la literatura son reproducidos con una buena correspondencia por nuestro solver en OpenFOAM®.

Capítulo 4

Geometrías para secadores de biomasa

Ya validado nuestro código, procederemos a realizar el estudio de la convección natural a partir de ciertas geometrías propuestas para secadores de biomasa. Se propone una forma de calentar la base de los secadores, la cual no se discutirá en esta tesis, por lo que la colección de energía no se realiza sobre el techo, con el fin de no introducir un método para forzar la convección dentro de la cámara de secado. Las dimensiones de los secadores se resumen en la tabla (4.1).

Geometría	L	$h1$	$h2$	X	$x1$	$x2$	Z	$\theta 1$	$\theta 2$	Volumen
G0	2			2			2			8.00
G1	2.34	1.65		2			2	19°		7.979
G2	2.42	1.96	1.3	2	0.66	1.34	2	$18^\circ 56' 47.41''$	45°	8.02

Tabla 4.1: Dimensiones de los secadores de biomasa dadas en metros (m).

La geometría G0, corresponde a un caso base en el que se consideran las mismas dimensiones para todos sus lados formando un cubo. Para el caso G1 se varía la altura de manera que se forme un angulo de 19° con respecto de la horizontal esto debido a lo explicado en la sección 1.2.1. En G2 se agrega otro ángulo de 45° que cubre 1/3 de la base y se mantiene el angulo de 19° sobre los 2/3 de la base restantes, esto con afán de incrementar el área sobre el secador. Para G1 y G2 la variación de la altura se realizó de tal manera que el volumen sea aproximadamente el mismo.

4.1 Geometrías 2D

Dado que nuestro estudio se limita al caso 2D de estas geometrías, se realizó una normalización de las dimensiones para el caso 3D, de tal forma que nuestra longitud característica sea la altura mayor que corresponde a la distancia entre las paredes a diferentes temperaturas. Las dimensiones para los casos 2D se resumen en la tabla (4.2).

Geometría	L	$h1$	$h2$	X	$x1$	$x2$	$\theta 1$	$\theta 2$	Área
G0	1			1					1.00
G1	1	0.7		0.85			19°		0.731
G2	1	0.81	0.54	0.83	0.27	0.55	19°	45°	0.669
G3	1	0.56		1.28			18°58′13″		0.998
G4	1	0.68	0.2	1.42	0.47	0.95	18°36′56″	45°36′11″	1.00

Tabla 4.2: Dimensiones normalizadas de las geometrías de estudio 2D.

En la Fig. (4.1) se muestran gráficamente las geometrías normalizadas de la tabla (4.2). Las geometrías G3 y G4, se proponen de tal manera en que el área se mantenga igual a la de la geometría G0.

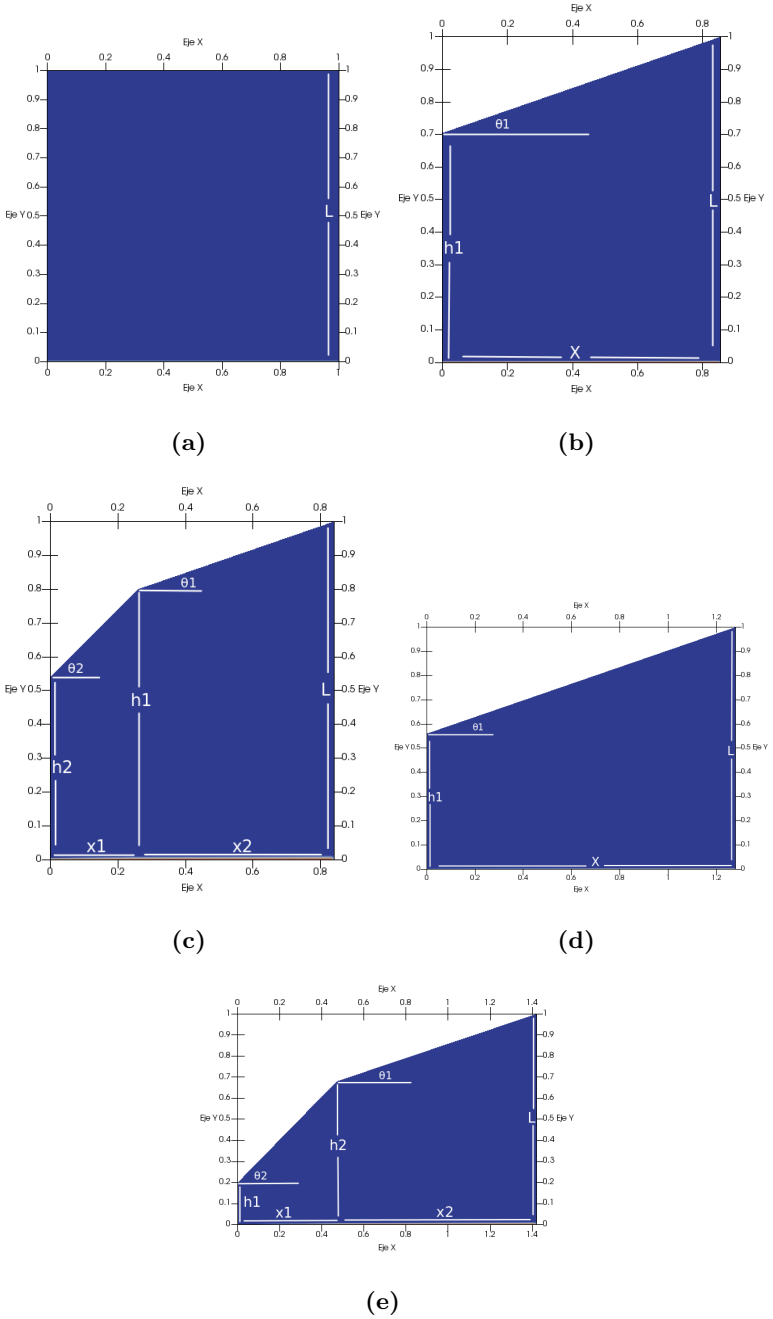


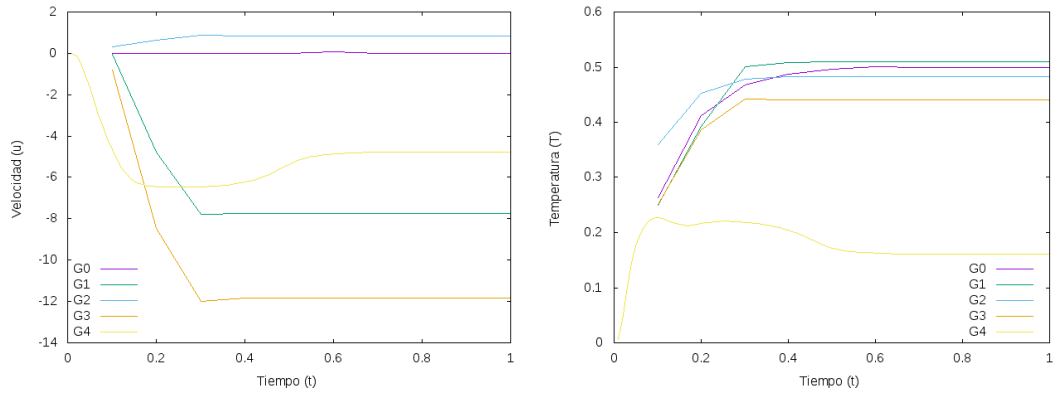
Figura 4.1: Geometrías de estudio normalizadas: a) G0, b) G1, c) G2. Geometrías de estudio que mantienen el área: d) G3, e) G4.

4.2 Resultados

El estudio se llevó acabo en las diferentes geometrías ya presentadas, considerando el aire como fluido de trabajo con un Prandlt de 0.71 y para un rango de Rayleigh entre $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. Los resultados de las simulaciones se muestran a continuación.

4.2.1 Estado estacionario y perfiles de velocidad

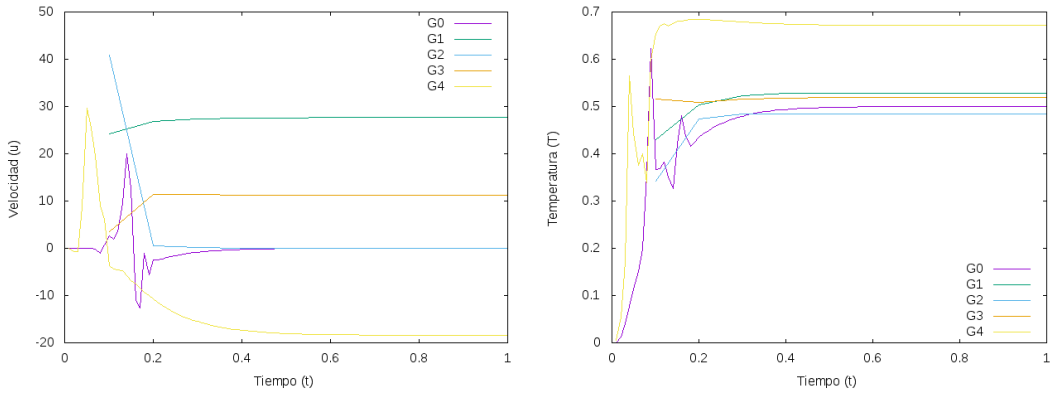
Las simulaciones pasan por un periodo transitorio para posteriormente llegar a un estado estacionario, como se muestran en las siguientes Figs. (4.2 - 4.4), las componentes horizontal de la velocidad y la temperatura tomadas en el punto central de la geometría, para los casos de $Ra = 10^4$



(a) **(b)**

Figura 4.2: Transición a estado estacionario componente u de la velocidad y para la temperatura T, para casos de $Ra = 10^4$. a) Componente u. b) Temperatura.

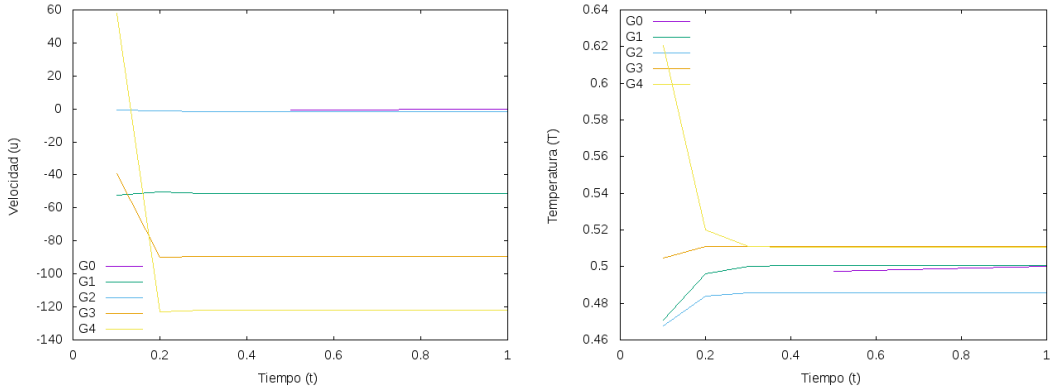
para el caso de $Ra = 10^5$



(a) **(b)**

Figura 4.3: Transición a estado estacionario componente u de la velocidad y para la temperatura T, para casos de $Ra = 10^5$. a) Componente u. b) Temperatura.

y para el caso $Ra = 10^6$

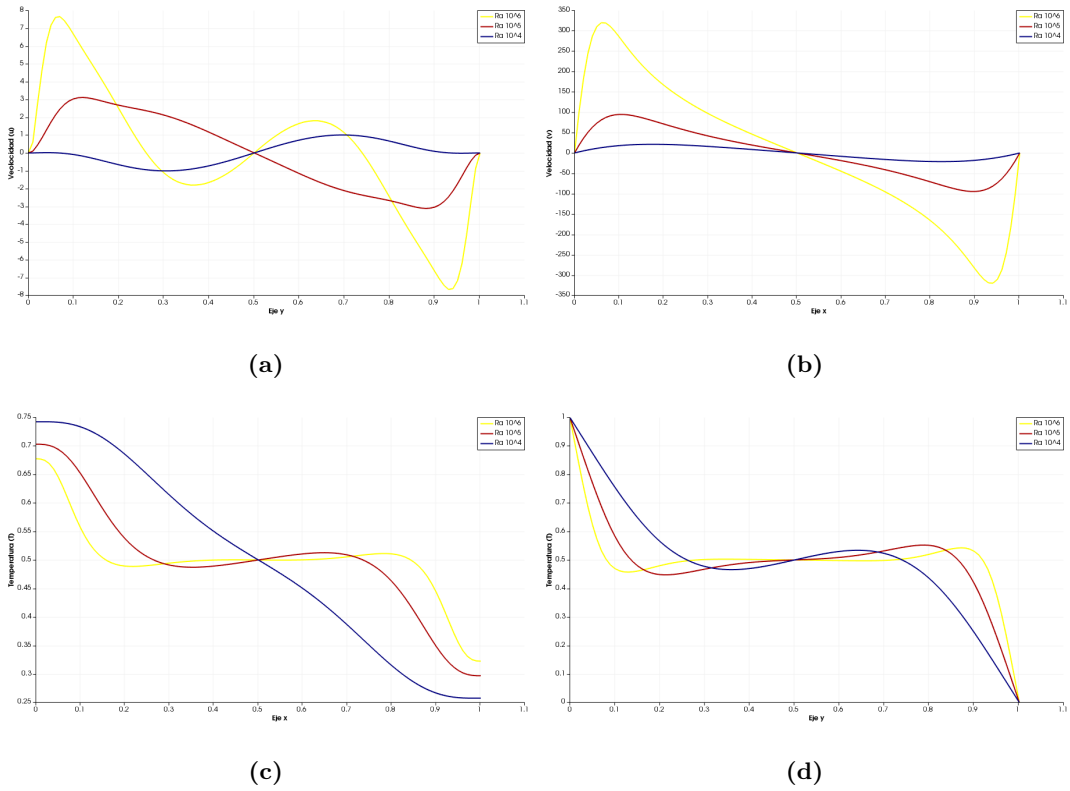


(a) **(b)**

Figura 4.4: Transición a estado estacionario componente u de la velocidad y para la temperatura T, para casos de $Ra = 10^6$. a) Componente u. b) Temperatura.

A continuación se muestran perfiles de las componentes de la velocidad u, v y de la temperatura T, a lo largo de la del eje x a una altura de $y = 0.5$, asi como a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$, para cada geometría en sus casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$.

Para la geometría G0 tenemos los siguientes perfiles



(a) **(b)**

(c) **(d)**

Figura 4.5: Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G0, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$.

para la geometría G1

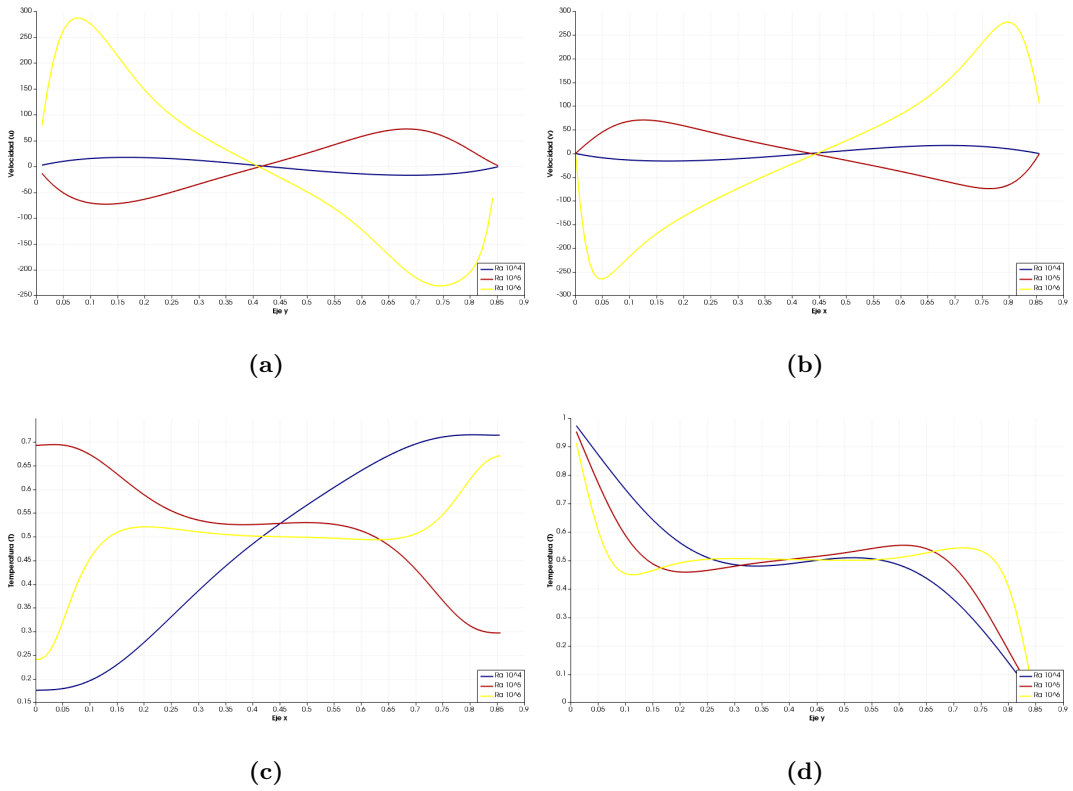


Figura 4.6: Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G1, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$.

para G2

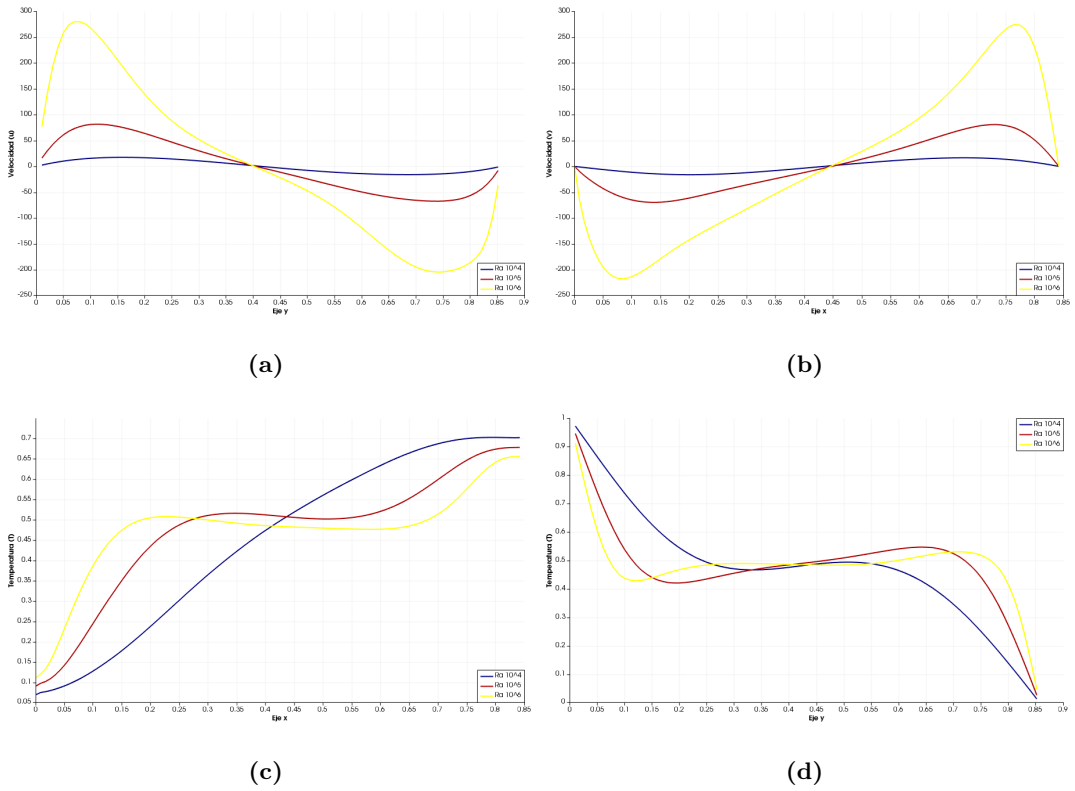


Figura 4.7: Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G2, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$.

para G3

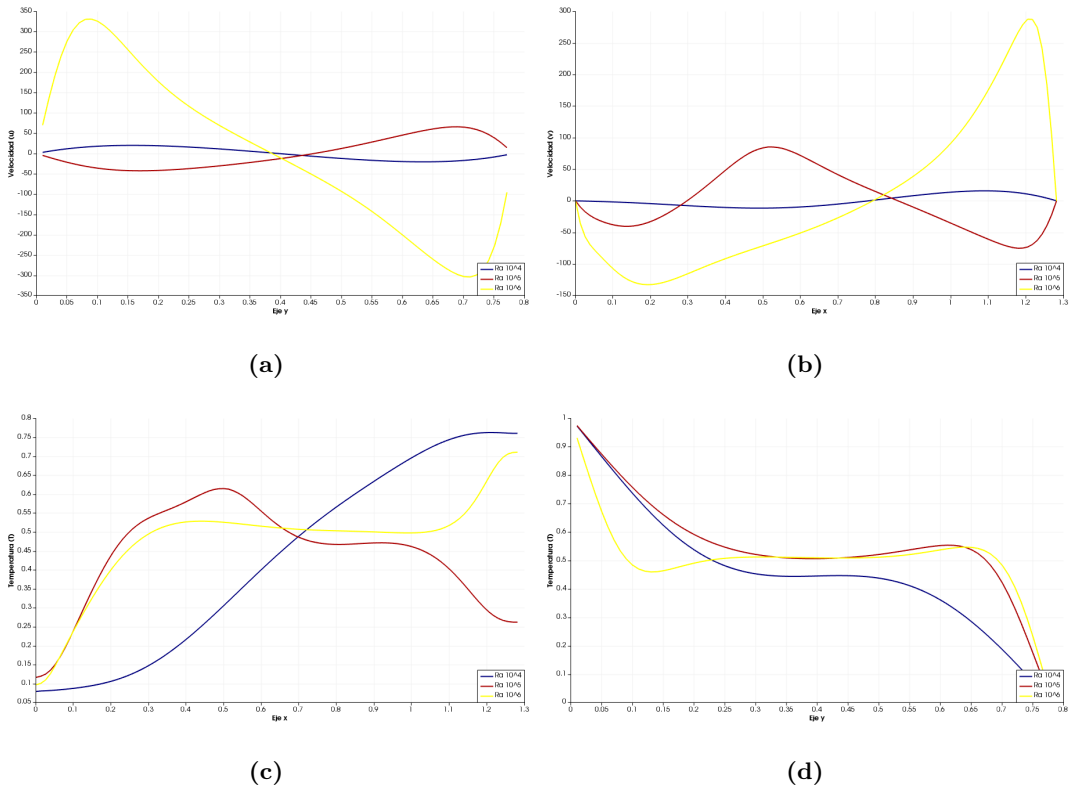


Figura 4.8: Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G3, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$.

para G4

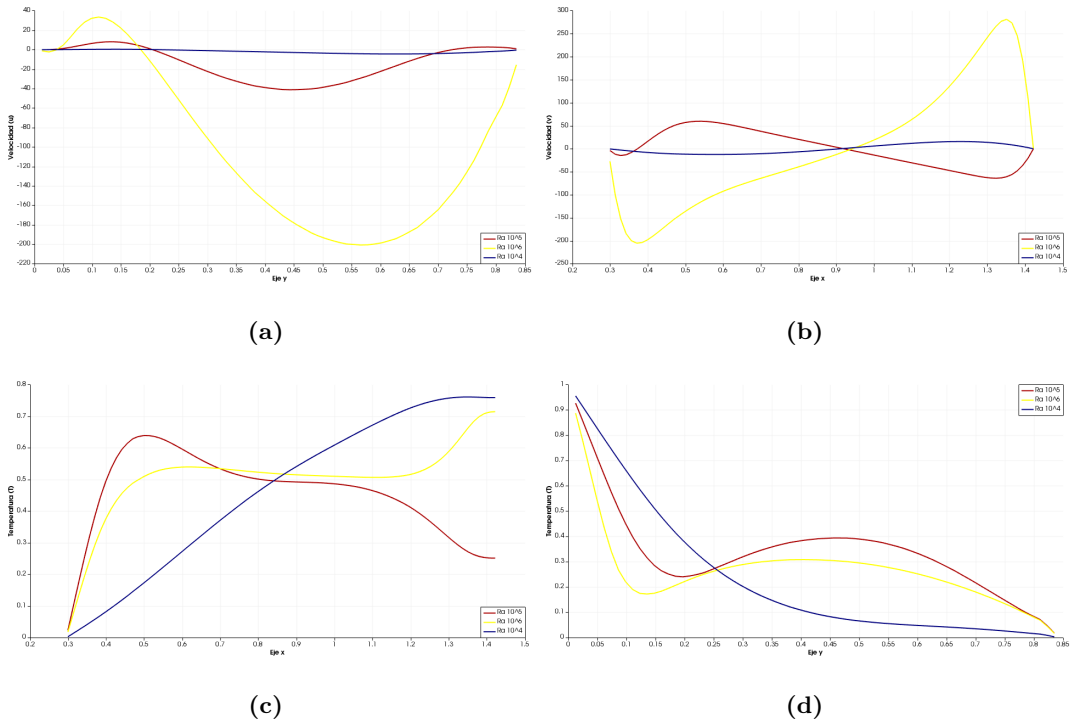
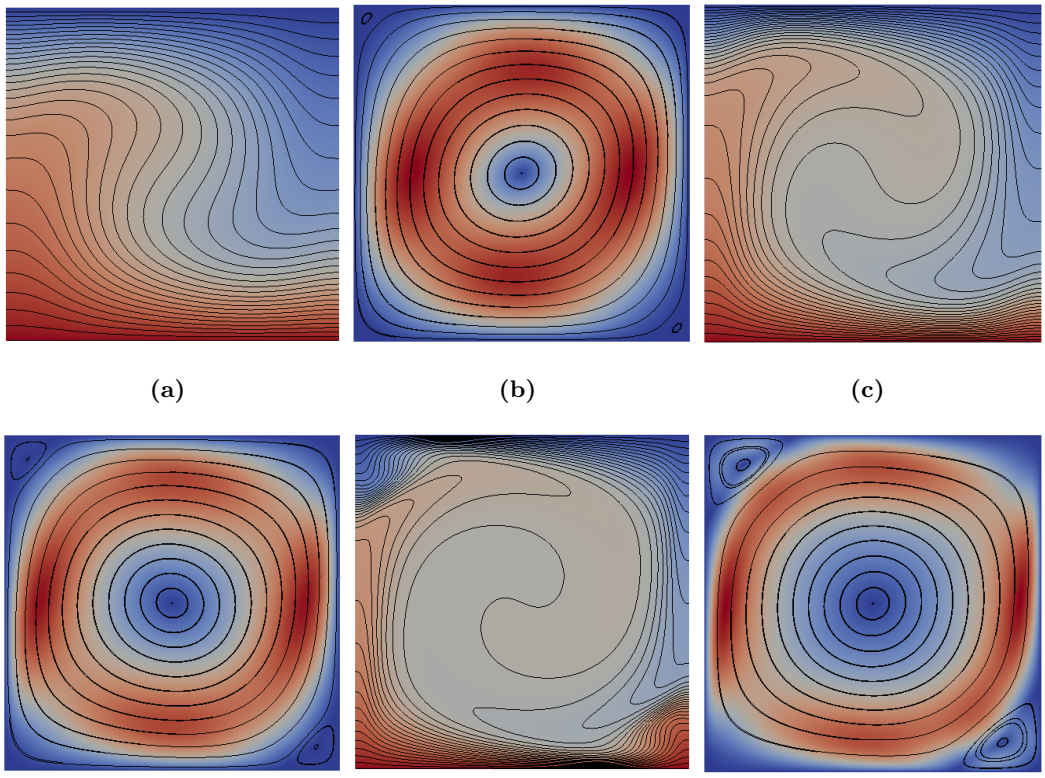


Figura 4.9: Perfiles de velocidad y temperatura para la geometría G4, para casos de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. a) Componente u a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$. b) Componente v sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. c) Temperatura T sobre el eje x a una altura de $y = 0.5$. d) Temperatura T a lo largo del eje y sobre $x = 0.5$.

4.2.2 Isotermas y líneas de flujo

Para tener una visión más amplia de como se lleva acabo el fenómeno dentro de las geometrías, se graficarón las líneas de contorno para la temperatura (isotermas) y las líneas del flujo para cada uno de los casos de estudio. Los resultados se muestran en las Figs. (4.10 - 4.14).

Para los casos de G0 con $10^4 < Ra < 10^6$

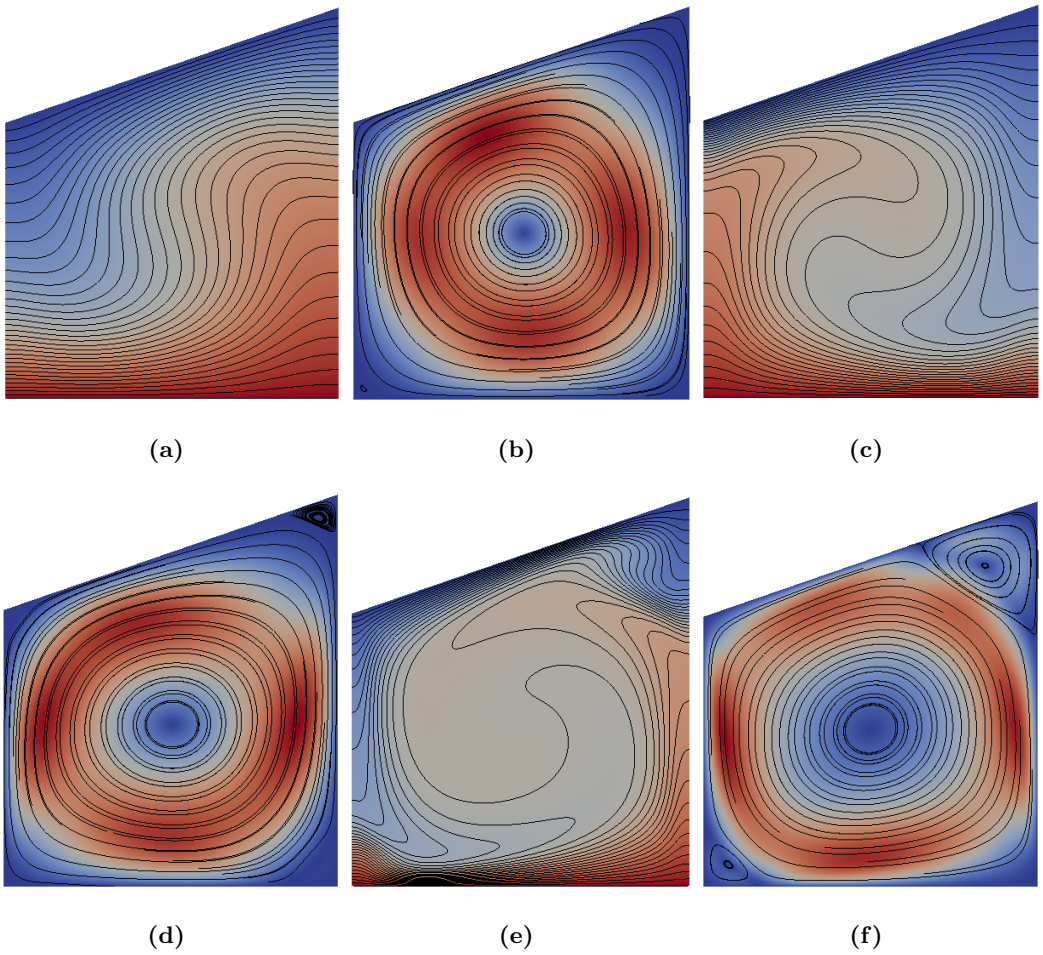


(a) **(b)** **(c)**

(d) **(e)** **(f)**

Figura 4.10: Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G0. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$.

Para los casos de G1 con $10^4 < Ra < 10^6$

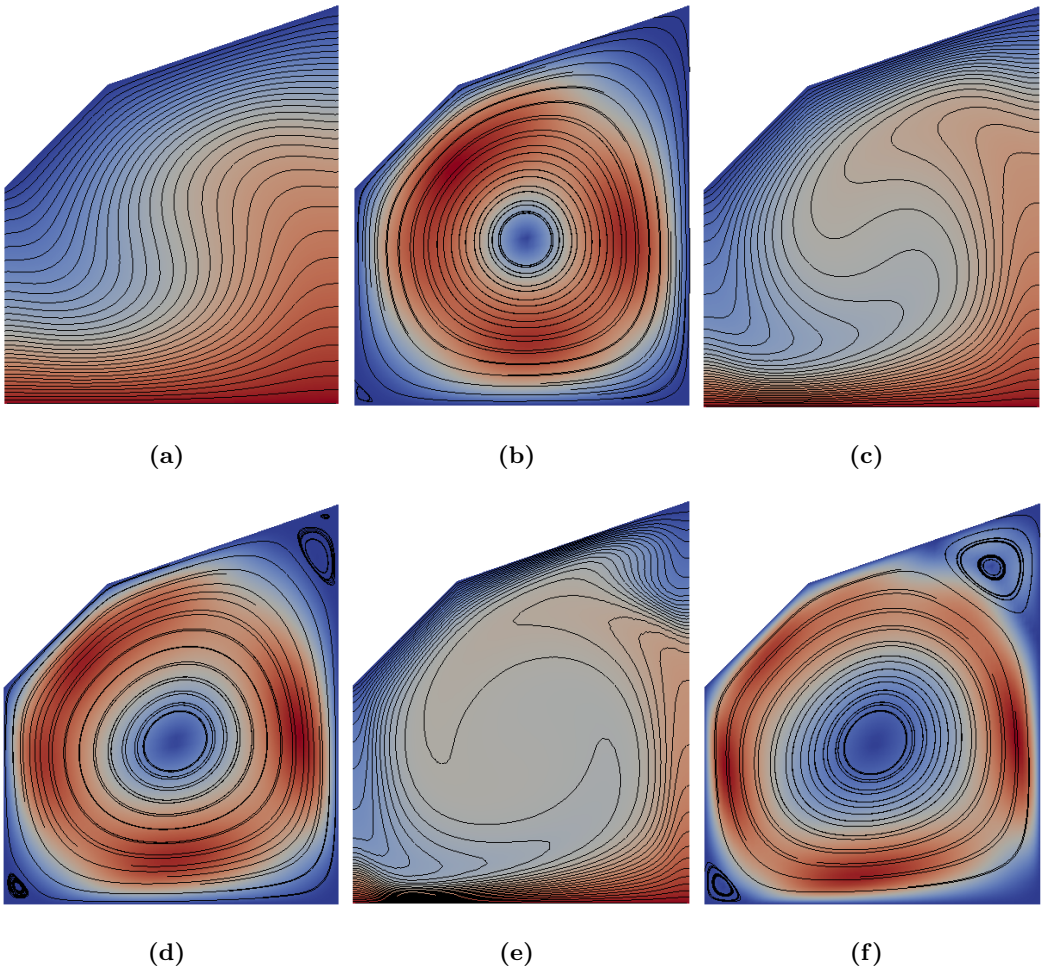


(a) **(b)** **(c)**

(d) **(e)** **(f)**

Figura 4.11: Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G1. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$.

Para los casos de G2 con $10^4 < Ra < 10^6$

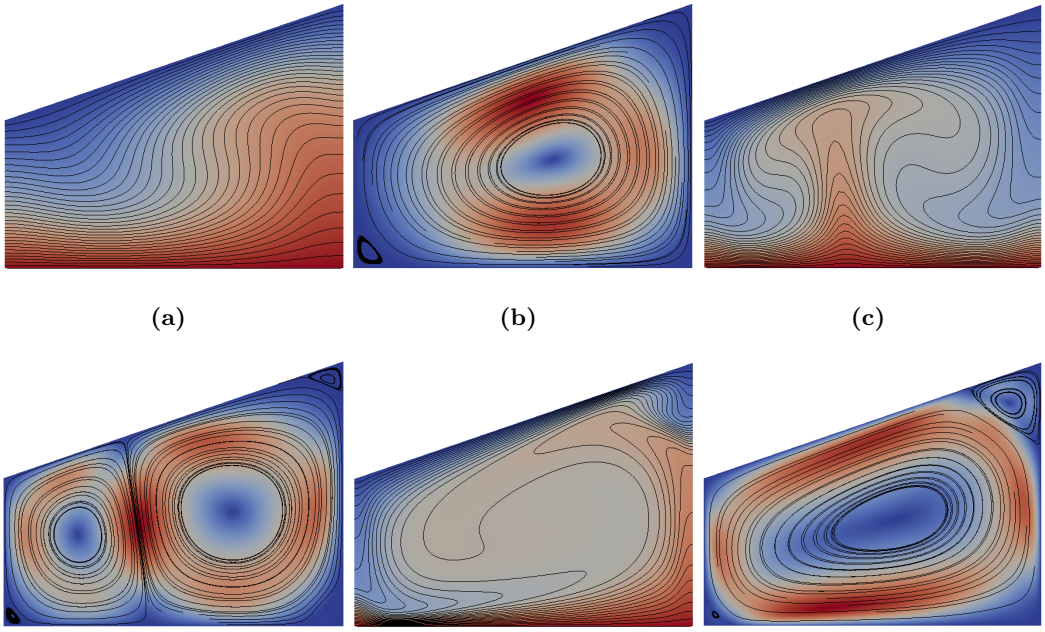


(a) **(b)** **(c)**

(d) **(e)** **(f)**

Figura 4.12: Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G2. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$.

Para los casos de G3 con $10^4 < Ra < 10^6$

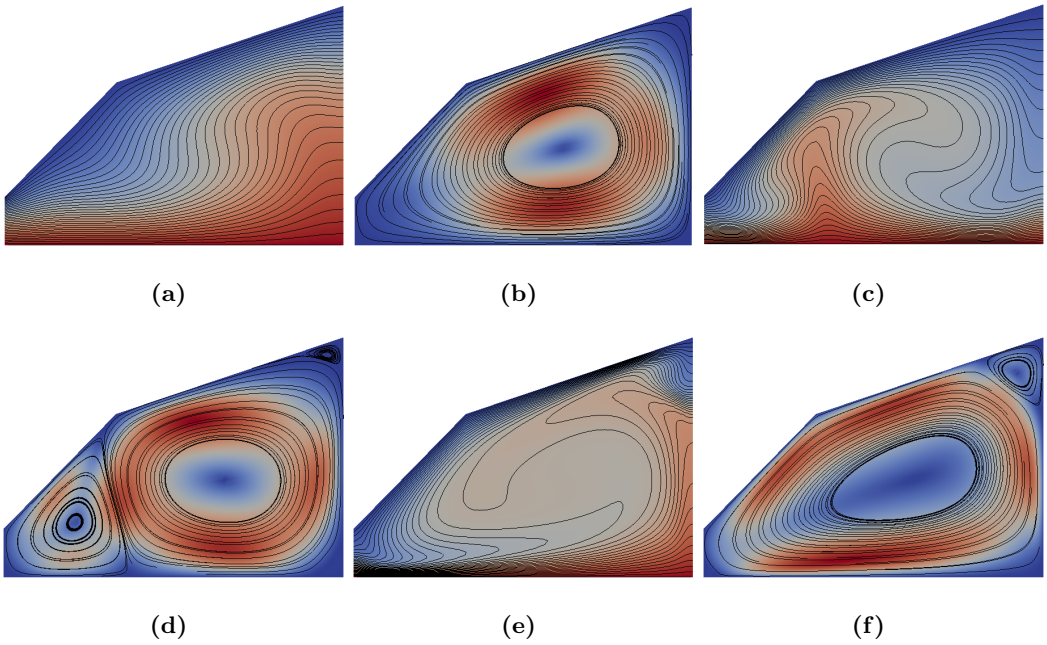


(a) **(b)** **(c)**

(d) **(e)** **(f)**

Figura 4.13: Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G3. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$.

Para los casos de G4 con $10^4 < Ra < 10^6$



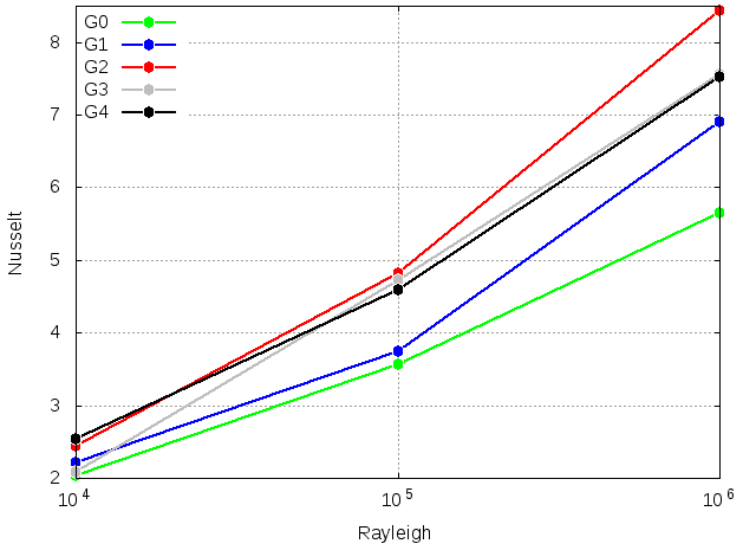
(a) **(b)** **(c)**

(d) **(e)** **(f)**

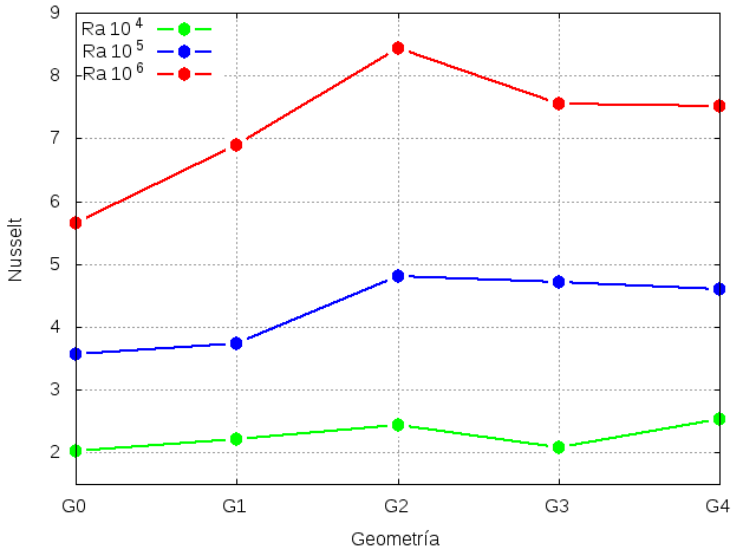
Figura 4.14: Líneas de contorno para la temperatura T y líneas de flujo, para los casos de la geometría G4. a) Isotermas $Ra = 10^4$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^4$, a) Isotermas $Ra = 10^5$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^5$, a) Isotermas $Ra = 10^6$, b) Líneas de flujo $Ra = 10^6$.

4.2.3 Cálculo del Nusselt

Calculando el Nusselt promedio $\bar{Nu}$ sobre la superficie caliente de las geometrías para los casos $10^4 \leq Ra \leq 10^6$ tenemos el siguiente comportamiento mostrado en la Fig. (4.15).



(a)



(b)

Figura 4.15: a) Gráfica del Nusselt promedio sobre la superficie caliente de las geometrías para todos los casos, $\bar{Nu}$ versus Ra. b) Gráfica del Nusselt promedio sobre el techo de las geometrías para todos casos, $\bar{Nu}$ versus Geometría.

Capítulo 5

Conclusiones

"En busca de valores propios, vectores propios, espacios propios y el amor propio."

— Gallardovsky

Dada la comparación de nuestro código contra los resultados obtenidos por Patniak en [D. C. Wan (4)], se verifica que las librerías de OpenFOAM® son confiables, permiten el desarrollo de solvers personalizados para cada problema de una forma más fácil y sencilla que el desarrollo de códigos usando los lenguajes de programación científica estándar (Fortran, C, C++, entre otros) ya que además es capaz de escalar el problema de 1 dimensión a 3 dimensiones sin requerir cambios en el código.

Se observa una buena comparación con los códigos para los perfiles de velocidad y temperatura para el caso de una cavidad de flotación. Adicionalmente, el código implementado en OpenFOAM fue validado con éxito no sólo con los resultados de otros códigos mencionados anteriormente, sino también mediante la reproducción de la correlación obtenida por Berkovsky y Polevikov, la cual relaciona el Nu como función del Rayleigh.

Para todos los casos de las simulaciones, se muestran desprendimientos de la capa límite del vórtice central, generando pequeños vórtices en las esquinas de la geometría que crecen en función del Rayleigh, esto debido al incremento de la velocidad del flujo. Se obtuvieron dos casos especiales en las geometrías G3 y G4 con $Ra = 10^5$ en donde se pueden diferenciar dos vórtices principales y los antes mencionados en las esquinas, este comportamiento se da debido a la razón de aspecto de la geometría en función de la longitud característica, por tanto requiere de un estudio más a detalle. La dinámica obtenida en todos estos casos concuerda con lo reportado en la literatura, incluyendo el fenómeno de razón de aspecto, que puede ser encontrado en [Lappa (16)].

El estudio del Nusselt promedio nos arroja el crecimiento esperado en función del

Rayleigh para todas las geometrías, además que nos determina que la geometría óptima es G2, ya que es en la que se obtiene un mayor Nusselt, lo que nos índica que la transferencia de calor es mejor y por ende existe un mayor flujo interno que beneficiaria el secado de la biomasa.

Como trabajos a futuro, se tiene el estudio de la razón de aspecto para los casos G3 y G4, extender el problema a 3D e implementar condiciones reales lo que implica la implementación de un modelo para flujo turbulento.

Apéndice A

Código en OpenFOAM®

```
#       include "fvCFD.H"

int main(int argc, char *argv[])
{

#   include "setRootCase.H"

#   include "createTime.H"
#   include "createMesh.H"
#   include "readTransportProperties.H"
#   include "readGravitationalAcceleration.H"
#   include "createFields.H"
#   include "initContinuityErrs.H"

// ------------------------------------------------------------ //

Info<< "\nStarting time loop\n" << endl;

//volVectorField

for (runTime++; !runTime.end(); runTime++)
{
Info<< "Time = " << runTime.timeName() << nl << endl;

#       include "readPISOControls.H"
#       include "CourantNo.H"

fvVectorMatrix UEqn
```

```
(
fvm::ddt(U)
+ fvm::div(phi, U)
- fvm::laplacian(nu, U)
==
-beta*(T - T0)*g
);

solve
(
UEqn == -fvc::grad(p)
);

// --- PISO loop

for (int corr = 0; corr < nCorr; corr++)
{
volScalarField rUA = 1.0/UEqn.A();

U = rUA*UEqn.H();
phi = (fvc::interpolate(U) & mesh.Sf())
+ fvc::ddtPhiCorr(rUA, U, phi);

adjustPhi(phi, U, p);

for (int nonOrth=0; nonOrth<=nNonOrthCorr; nonOrth++)
{
fvScalarMatrix pEqn
(
fvm::laplacian(rUA, p) == fvc::div(phi)
);

pEqn.setReference(pRefCell, pRefValue);
pEqn.solve();

if (nonOrth == nNonOrthCorr)
{
phi -= pEqn.flux();
}
}

#       include "continuityErrs.H"
```

```
U -= rUA*fvc::grad(p);
U.correctBoundaryConditions();
}

// --- Solve energy equation
solve
(
fvm::ddt(T)
+ fvm::div(phi, T)
- fvm::laplacian(DT, T)
+   ( tau && gradU )/(rho*Cp)

);

rho = rho0*(scalar(1) - beta*(T - T0));

runTime.write();

Info<< "ExecutionTime = " << runTime.elapsedCpuTime() << " s"
<< "  ClockTime = " << runTime.elapsedClockTime() << " s"
<< nl << endl;
}

Info<< "End\n" << endl;

return(0);
}
```

Bibliografía

[1] Analitics, R. (2015). Resolved analitics. https://www.resolvedanalytics.com/theflux/comparing-popular-cfd-software-packages. Accessed: 2017-08-10. xi, 9

[2] Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2):215–234. 40

[3] Currie, I. and Currie, I. (2002). *Fundamental Mechanics of Fluids, Third Edition*. Dekker Mechanical Engineering. Taylor & Francis. 15

[4] D. C. Wan, B. S. V. Patnaik, G. W. W. (2001). A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 40(3):199–228. xi, xi, xii, xii, xii, xii, 25, 38, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 73

[5] de Vahl Davis, G. (1983). Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. 3:249 – 264. 38

[6] De Vahl Davis, G. G., Jones, I. P., of New South Wales. School of Mechanical, U., and Engineering, I. (1982). Natural convection in a square cavity : a comparison exercise. 38

[7] Diersch, H.-J. (1990). Fletcher, c. a. j., computational techniques for fluid dynamics. vol. i: Fundamental and general techniques. vol. ii: Specific techniques for different flow categories. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 70(9):409–410. 13

[8] Ekechukwu, V. and Norton, B. (1999). Review of solar-energy drying systems ii: An overview of solar drying technology. 40:615–655. 7

[9] Ferziger, J. and Peric, M. (1999). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 19, 21

[10] González, J. N. (2011). *Simulación Numérica de la convección bajo la influencia de fuerzas electromagnéticas y fuerzas de rotación.* PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México. 35

[11] Griebel, M., Dornsheifer, T., and Neunhoeffer, T. (1998). *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction.* Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics. 7

[12] I. P. Jones, R. W. Lewis, K. M. (1979). A comparison problem for numerical methods in fluid dynamics: The double glazing problem. *Numerical Methods in Fluids in Thermal Problems*, pages 338–348. 38

[13] Incropera, F. (2007). *Fundamentals of heat and mass transfer.* Number v. 1 in Fundamentals of Heat and Mass Transfer. John Wiley. 3, 5

[14] Issa, R. (1986). Solution of the implicit discretized fluid flow equations by operator splitting. 62. 37

[15] Koschmieder, E. (1993). *Bénard Cells and Taylor Vortices.* Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press. xi, 4

[16] Lappa, M. (2009). *Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability.* Wiley. 73

[17] Massarotti, N., Nithiarasu, P., and Zienkiewicz, O. (1998). Characteristic based split (cbs) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 8(8):969–990. 44

[18] Olver, P. (2013). *Introduction to Partial Differential Equations.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing. 13

[19] Paolucci, S. and Chenoweth, D. R. (1989). Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 201:379–410. 23

[20] Prieve, D. C. (2000). *A Course in Fluid Mechanics with Vector Field Theory.* 16

[21] Thom, A. (1933). The flow past circular cylinders at low speeds. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 141(845):651–669. 7

[22] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method.* Addison-Wesley-Longman, 1 edition. 37

[23] Wan, D., Patnaik, B., and Wei, G. (2002). Discrete singular convolution–finite subdomain method for the solution of incompressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 180(1):229 – 255. 26

[24] Xamán, J. and Gijón-Rivera, M. (2016). *Dinámica De Fluidos Computacional Para Ingenieros.* Palibrio. 37