

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

División de estudios de posgrado
Posgrado en ciencias en ingeniería física

Estudio numérico del flujo forzado electromagnéticamente en una cavidad cilíndrica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

PRESENTA:

LFM. Francisco Peña Gallardo
Matrícula: 0004035H
frapega@gmail.com

ASESOR:
Dr. Alberto Beltrán Morales
albem@materiales.unam.mx
IIM-UNAM

ASESOR:
Dr. Héctor Igor Pérez Aguilar
hiperezag@yahoo.com
UMSNH



Morelia, Michoacán, abril, 2021

Nuestra realidad total y nuestra existencia total son hermosas y significativas...
Debemos juzgar la realidad por lo poco que realmente sabemos de ella. Dado que esa parte que conceptualmente conocemos resulta ser tan hermosa, el mundo real del que sabemos tan poco también debería ser hermoso. La vida puede ser miserable por setenta años y feliz por un millón de años:
el corto período de miseria puede incluso ser necesario para el conjunto.
-Kurt Gödel

Agradecimientos

A mi familia, principalmente a mis padres por el apoyo incondicional durante todos estos años que me ha llevado a ser quien soy y me ha permitido llegar hasta este momento.

A mis sobrinas que siempre me alegran con su presencia.

A mi asesor el Dr. Alberto Beltrán Morales por su apoyo y paciencia a lo largo de todo este tiempo que me ha permitido trabajar a su lado.

A mis tutores, Dr. Hector Igor Pérez Aguilar, Dr. Gonzalo Viramontes Gamboa, Dr. José Antonio González Cervera, por sus valiosas sugerencias, comentarios.

A mis compañeros y amigos, que me han acompañado a lo largo de esta etapa y que de forma directa o indirecta me han motivado a continuar.

Agradecimientos

Agradezco el financiamiento de esta investigación al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM a través de los proyectos UNAM-DGAPA-PAPIIT IA102017 e IN108619, así como al proyecto SENER-CONACyT 2014-246911 "Clúster de biocombustibles sólidos (CBS) para la generación térmica y eléctrica". Adicionalmente, se agradece al Lic. Alejandro Pompa García y al M. C. Alberto López Vivas por la configuración del software y equipos de cómputo usados para las simulaciones numéricas. Y al apoyo de CONACYT mediante la beca 892127.

Resumen

En este trabajo se modela numéricamente el comportamiento magnetohidrodinámico (MHD) de un fluido conductor confinado al interior de una cavidad cilíndrica en analogía a las configuraciones de electrodos para baterías de metal líquido (BML). Se hace circular una corriente eléctrica directa de forma ascendente en la dirección axial y en presencia de un campo magnético no uniforme como el generado por un imán permanente. El fluido es agitado por la fuerza de Lorentz producida por la corriente eléctrica suministrada y el campo magnético impuesto. En particular, se consideran dos electrolitos como fluidos de trabajo: el primero de bicarbonato de sodio ($NaHCO_3$) y un segundo de cloruro de potasio (KCl). El efecto en el flujo de dos distribuciones de campo magnético también se analiza.

Para la simulación numérica se utiliza el modelo de carga para el campo magnético del imán permanente y la formulación-ϕ (formulación del potencial escalar eléctrico). Usando estos modelos las ecuaciones de las MHD se resuelven mediante las librerías de software libre OpenFOAM®. En particular, los resultados para el campo de velocidad en el plano central axial, se comparan con los datos experimentales obtenidos previamente por el grupo de trabajo.



El desarrollo del algoritmo y su validación mediante la simulación del problema ya descrito, permitirá estudios paramétricos para distintos fluidos conductores y configuraciones.

Palabras clave: OpenFOAM®, MHD, potencial escalar eléctrico, formulación-ϕ, BML.

Abstract

In this work, the magnetohydrodynamic (MHD) behavior of a conductive fluid confined inside a cylindrical cavity is numerically modeled in analogy to the electrode configurations for liquid metal batteries (BML). A direct electric current is circulated upward in the axial direction and in the presence of a non-uniform magnetic field such as that generated by a permanent magnet. The fluid is driven by the Lorentz force produced by the supplied electric current and the imposed magnetic field. In particular, two electrolytes are considered as working fluids: the first of sodium bicarbonate ($NaHCO_3$) and the second of potassium chloride (KCl). The effect on the flow of two magnetif field distribution is also analyzed.

For the numerical simulation the charge model for the permanent magnet magnetic field is used and the ϕ-formulation (electrical scalar potential formulation), using these models the MHD equations are solved using the free CFD software libraries OpenFOAM®. In particular, the results for the velocity field in the axial central plane are compared with the experimental data previously obtained by the work team.

The development of the algorithm and its validation by simulating the problem already described, will allow parametric studies for different conductive fluids and configurations.

Keywords: OpenFoam®, MHD, ϕ-formulation, electrical scalar potential, BML.

Índice general

Índice de figuras xiii

Índice de tablas xv

1. Introducción 1
- 1.1. Baterías de metal líquido . . . 1
- 1.2. Herramienta numérica . . . 3

2. Modelo físico 5

3. Modelos matemáticos 9
- 3.1. Electromagnetismo . . . 10
- 3.2. Relaciones constitutivas . . . 11
  - 3.2.1. Dinámica de fluidos . . . 12
  - 3.2.2. Parámetros adimensionales . . . 13
- 3.3. Formulaciones de la MHD . . . 13
  - 3.3.1. Formulación **B** . . . 13
  - 3.3.2. Formulación j . . . 14
  - 3.3.3. Formulación ϕ . . . 14
- 3.4. Análisis magnetostático . . . 15
  - 3.4.1. Modelo de carga . . . 15

4. Metodología numérica 17
- 4.1. Método de volumen finito . . . 17
- 4.2. Simulaciones de campo magnético . . . 18
- 4.3. Simulaciones de la dinámica del flujo . . . 21
- 4.4. Algoritmo de solución . . . 21

5. Resultados y discusión 25
- 5.1. Campo magnético . . . 25
- 5.2. Patrones de flujo . . . 28
- 5.3. Perfiles de velocidad . . . 33

6. Conclusiones y trabajo futuro **37**

A. Solución analítica al modelo de carga para el campo magnético **39**

B. Validación numérica de la formulación-ϕ **41**

C. Código en OpenFOAM® **49**

Bibliografía **57**

Índice de figuras

1.1. Procesos de carga (izquierda) y descarga (derecha) para una BML. . . . 2
1.2. Mezclado de las capas estratificadas de una BML, tomado de Weber [1] 3

2.1. Bosquejo del problema de estudio. Tomado del trabajo de Herrera-Ortega [2]. . . . 6
2.2. Imán de neodimio (NdFeB), magnetizados uniformemente en la dirección de menor grosor. . . . 7
2.3. Esquema del montaje experimental para medición de campos de velocidad de electrolitos agitados electromagnéticamente en cavidades cilíndricas. Imagen tomada del trabajo de Herrera-Ortega [2]. . . . 8

4.1. Diagrama del método de volumen finito. Imagen tomada de Peña [3] . . 18
4.2. Geometría del imán cuadrado, con mallado hexaédrico de 50 elementos en x, y, z. . . . 19
4.3. Geometría del dominio computacional. a) Diagrama de las pirámides truncas que corresponden a los polos del imán. b) Malla de las pirámides truncas, una se muestra sólo con las caras paralelas. c) Vista frontal de una pirámide trunca. d) Dominio computacional completo. . . . 20
4.4. a) Tapa superior de la cavidad cilíndrica b) Mallado 3D de la cavidad. . 21
4.5. Diagrama de flujo del algoritmo. . . . 22

5.1. Perfiles de campo magnético para el imán cuadrado. Comparación entre resultados experimentales (-E), numéricos (-N) y de la solución analítica (-A) a lo largo de los ejes: a) x, b) y y c) z. . . . 26
5.2. Perfiles de campo magnético para el imán cuadrado. Comparación entre resultados experimentales (-E), numéricos (-N) y de la solución analítica (-A) a lo largo de los ejes: a) x, b) y y c) z. . . . 27
5.3. Representación esquemática de los principales campos vectoriales en la cavidad cilíndrica. . . . 28

5.4. Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán cuadrado, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de KCl. (a) Planos de simetría, (b) y-z para $x = 0$, (c) x-z para $y = 0$, y (d) x-y para $z = 0$. 30
5.5. Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán cuadrado, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de $NaHCO_3$. (a) Planos de simetría, (b) y-z para $x = 0$, (c) x-z para $y = 0$, y (d) x-y para $z = 0$. 31
5.6. Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán rectangular, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de KCl. (a) Planos de simetría, (b) y-z para $x = 0$, (c) x-z para $y = 0$, y (d) x-y para $z = 0$. 32
5.7. Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán cuadrado, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de $NaHCO_3$. (a) Planos de simetría, (b) plano y-z para $x = 0$, (c) plano x-z para $y = 0$, y (d) plano x-y para $z = 0$. 33
5.8. Comparación numérico-experimental de perfiles de velocidad para las distintas componentes de la velocidad a lo largo de los ejes de simetría para el campo magnético del imán cuadrado. (a) v vs. y para $x = z = 0$, (b) w vs. y para $x = z = 0$, (c) v vs. z para $x = y = 0$, y (d) w vs. z para $x = y = 0$. 34
5.9. Comparación numérico-experimental de perfiles de velocidad para las distintas componentes de la velocidad a lo largo de los ejes de simetría para el campo magnético del imán rectangular. (a) v vs. y para $x = z = 0$, (b) w vs. y para $x = z = 0$, (c) v vs. z para $x = y = 0$, y (d) w vs. z para $x = y = 0$. 35

B.1. Ducto de sección transversal cuadrada. 41
B.2. Mallado computacional desarrollado en OpenFOAM®. 42
B.3. Perfiles de velocidad vs. y obtenidos analíticamente (-A) y numéricamente (-N). 46
B.4. Perfiles de velocidad vs. x obtenidos analíticamente (-A) y numéricamente (-N). 46

Índice de tablas

2.1. Conductividad eléctrica, densidad y viscosidad dinámica de los electrolitos a una concentración en relación de masa/masa del 8.6 %. 6

4.1. Tabla de esquemas de interpolación. 24

B.1. Porcentaje de error entre la solución analítica y la numérica. 47

Capítulo 1

Introducción

La motivación principal del presente trabajo, se enfoca en la comprensión de patrones de flujo de fluidos conductores que pudieran estar relacionados a los presentes en nuevas configuraciones de sistemas de almacenamiento de energía que hacen uso de dichos fluidos. A continuación se describe brevemente algunas de las características principales de uno de estos sistemas.

El presente trabajo se divide en seis capítulos. El primero presenta una introducción del funcionamiento general de las baterías de metal liquido así como a la herramienta numérica utilizada. En el segundo capítulo se explica el modelo experimental utilizado por el grupo de trabajo el cual es el modelo físico que se simuló en esta tesis. Posteriormente la teoría física y los modelos matemáticos utilizados son explicados. En el capítulo cuatro se muestra toda la metodología numérica utilizada en OpenFOAM®, siendo el capítulo cinco donde se exponen todos los resultados obtenidos de las simulaciones. Finalmente se muestran las conclusiones en el capítulo seis.

1.1 Baterías de metal líquido

La magnetohidrodinámica (MHD) se describe como la combinación de la dinámica de fluidos clásica y la electrodinámica, la cual estudia el comportamiento de los fluidos conductores en presencia de campos magnéticos impuestos o generados mediante inducción. La MHD se ha desarrollado rápidamente estableciéndose como un campo de gran importancia en varios contextos como: geomagnetismo, astrofísica, fusión nuclear [4] y en tecnologías de almacenamiento de energía como lo son las baterías de metal líquido (BML).

Actualmente, la capacidad de almacenamiento de las redes eléctricas es prácticamente nula. Dotar a las redes con esta característica, las convertiría en una tecnología más robusta y resistente con la capacidad de incorporar mayores cantidades de energía

intermitente generada por fuentes renovables de energía como la radiación solar y el viento [5].

Las BML son una familia de celdas electroquímicas, las cuales están fabricadas con diferentes metales activos combinados. Típicamente los materiales para el ánodo son Ca, Li, K, Na, Mg mientras que Bi, Hg, Pb, Sb, Sn, Te y Zn son utilizados para el cátodo metálico [6]. Aunque aún se encuentran en su etapa de desarrollo, las BML son una opción tecnológica para el almacenamiento a gran escala de energía eléctrica de forma estacionaria. Están compuestas por un electrodo negativo (generalmente un metal con baja electronegatividad) de baja densidad y un electrodo positivo (metal con alta electronegatividad) de mayor densidad. Los electrodos se separan por una capa intermedia de electrolito de sal fundida, que tiene una densidad media entre los electrodos [7].

La fig. 1.1 muestra de forma simplificada los procesos de carga y descarga para una BML. En general durante la descarga el metal electropositivo (Metal A) entra por el electrolito hacia el electrodo negativo, y se deposita en el electrodo positivo, creando una aleación con el metal electronegativo (Metal B). Por lo tanto, mientras la batería se descarga el electrodo positivo crece a expensas de que el electrodo negativo se contrae. Durante la carga, las reacciones inversas ocurren, resultando en el crecimiento del electrodo negativo y el decrecimiento del positivo. A lo largo de estos procesos, el electrolito no cambia su grosor [8].

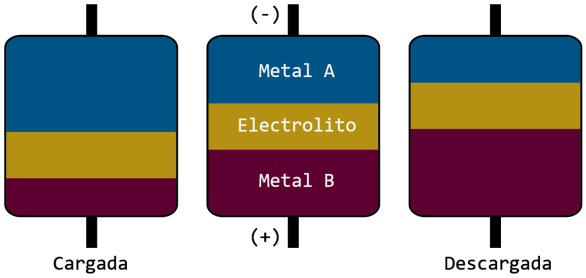


Figura 1.1: Procesos de carga (izquierda) y descarga (derecha) para una BML.

Dentro de las ventajas de las BML, se tiene que están construidas con elementos abundantes en la tierra, por lo que son de bajo costo, tienen un tiempo de vida largo ya que no sufren degradación mecánica y son capaces de soportar corrientes más elevadas que las baterías sólidas. Lo anterior, las vuelve candidatos ideales en aplicaciones como nivelamiento de carga y control de frecuencia [9]. Para este tipo de baterías destaca que, la resistencia óhmica del electrolito es por mucho la de mayor magnitud y también la formación de dendritas en el proceso de aleación, que son capaces de causar un corto circuito [6].

Una forma de eliminar la formación de dendritas es mediante una batería sin ánodo, como la que está fabricada con Zn||MnO_2, aunque dichas celdas tienen menor eficiencia y soportan una menor cantidad de ciclos de carga y descarga [10]. Otra alternativa relativamente fácil de implementar en los desarrollos tecnológicos ya existentes, consiste en el uso de campos magnéticos externos el cual al interaccionar con la corriente aplicada (de carga o descarga) genera una fuerza de Lorentz capaz de agitar al fluido evitando así la formación de dendritas [11]. El flujo anteriormente descrito se conoce como electro-vortex y dependiendo de las distribuciones de campo magnético impuestas externamente es posible obtener patrones de flujo que reducen o aumentan la resistencia óhmica del sistema.

Es importante hacer notar que una agitación muy intensa debido a la fuerza de Lorentz podría generar un mezclado de las capas estratificadas produciendo un cortocircuito en la batería [1], tal como se ejemplifica en la fig. 1.2.

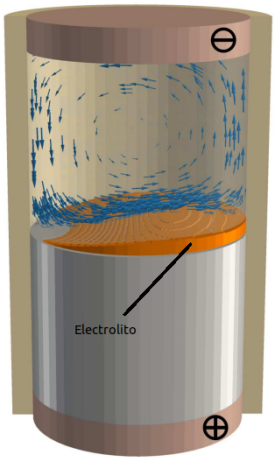


Figura 1.2: Mezclado de las capas estratificadas de una BML, tomado de Weber [1]

Recientemente, el estudio del flujo al interior de las BML ha ganado interés en la literatura, destacando trabajos sobre los fenómenos MHD, de transferencia de calor e incluso electroquímicos [12, 13]. Como anteriormente se mencionó, el flujo electro-vortex constituye la fuente principal de movimiento, ha sido estudiado desde un punto de vista tanto numérico [14] como experimental [15].

1.2 Herramienta numérica

En la literatura se ha reportado el uso de herramientas de software comercial para la solución de problemas MHD y también recientemente para BML, que dentro de las cuales destacan COMSOL Multiphysics [16] y ANSYS [17]. Adicionalmente, se cuenta

con herramientas de software libre [18] e incluso desarrollo de códigos propios [19]. En el grupo de trabajo se tiene experiencia en el modelado de problemas relacionados a las BML; en particular, se ha implementado la formulación-ϕ en COMSOL Multiphysics, para simular regiones multidominio que incluyen: imanes, fluidos conductores y aire. Además para problemas de fluidos conductores agitados electromagnéticamente en cavidades cilíndricas [20].

A pesar de los buenos resultados obtenidos con software como COMSOL Multiphysics, el pago anual de renovaciones de licencia hace que su uso se encarezca y dependa de la disponibilidad de recursos económicos año con año. Una alternativa que ha ganado terreno es el uso de herramientas de software de código abierto: OpenFOAM®, SU2, Helyx, PyFR, FEniCS son algunas de ellas. Una de las más populares es OpenFOAM® que es es una paquetería de Software para CFD (Computational Fluid Dynamics, por sus siglas en inglés) de código abierto escrito en C++ que hace uso del método de volumen finito (FVM, por sus siglas en inglés) como su método de solución. Contiene una extensa librería de programas diseñados para resolver diferentes problemas en un espectro que va desde químicos a electromagnéticos. La distribución estándar provee una plataforma para construir código relativamente rápido y adecuado al problema a resolver. Para el desarrollo de esta tesis se utilizó OpenFOAM v1912.

Una de las características distintivas de OpenFOAM® es su sintaxis para operaciones tensoriales y ecuaciones diferenciales, que se asemeja a las ecuaciones a resolver, por ejemplo

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \phi \mathbf{U} - \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{U} = -\nabla p,$$

es representada en el código por

```
solve
(
    fvm::ddt(rho,U) + fvm::div(phi,U) - fvm::laplacian(mu,U)
== -fvc::grad(p)
);
```

dicha sintaxis, se logra mediante el uso de programación orientada a objetos y sobrecarga de operadores.

Capítulo 2

Modelo físico

Como se ha mostrado en el Capítulo 1, una BML está compuesta de tres diferentes fluidos conductores, que se estratifican por su diferencia de densidad. En el fondo y arriba se tienen metales líquidos que fungen como electrodos (ánodo y cátodo), separados por una capa de electrolito de una sal fundida.

Durante el proceso de carga de una BML, se inyecta una corriente eléctrica en la dirección ascendente [21]. Para una diferencia de voltaje fija, es claro que mayor será la densidad de corriente mientras mayor sea la conductividad eléctrica del medio. Adicionalmente, una menor conductividad eléctrica en el rango de $10^6 - 10^7$ para los electrodos, mientras que para el electrolito es del orden $10^1 - 10^2$. La elevada resistencia del electrolito y la corriente eléctrica generan calentamiento de Joule, lo que produce recirculaciones debidas a fuerzas de flotación en la zona del electrolito [22].

En términos de la fuerza de Lorentz, se espera que velocidades de menor magnitud se encuentren en esta región, debido a la menor conductividad eléctrica. El impacto de la velocidad y patrones de flujo en parámetros como trasporte de masa, mezclado, difusión de especies y diferencia de potencial, ha sido documentado recientemente en la literatura [13, 11, 22].

Desde el punto de vista experimental la caracterización de flujo como los presentes en las BML es muy complicado, al tratarse tanto de contenedores como de fluidos opacos, se complica el uso de técnicas ópticas como la velocimetría por imágenes de partícula (PIV, por sus siglas en inglés) [23] y requiere el uso de técnicas y/o dispositivos más sofisticados y costosos como la velocimetría de ultrasonido por efecto Dopler (UDV, por sus siglas en inglés), la cual se ha usado con éxito en configuraciones relacionadas a las BML y donde se tienen fluidos de trabajo opacos [11, 21].

En el grupo de trabajo se tiene un desarrollo experimental para flujos de electrolitos confinados en cavidades cilíndricas y agitados electromagnéticamente mediante una fuerza de Lorentz, generada por la interacción de corriente eléctrica directa inyectada

en la dirección axial y un campo magnético no uniforme como el producido por imanes permanentes. Adicionalmente, se ha logrado realizar mediciones de campos de velocidad en el plano central del cilindro mediante la técnica PIV.

A continuación se describe brevemente la configuración experimental y mediciones experimentales para el flujo de un electrolito forzado electromagnéticamente en una cavidad cilíndrica. Dicho problema es el que se busca simular en el presente trabajo de tesis.

La fig. 2.1 muestra el modelo físico a simular; consiste de un cilindro de diámetro y altura, $D = 17.5 \times 10^{-3}$ m y $H = 19 \times 10^{-3}$ m (razón de aspecto $H/D \approx 1$), respectivamente. Se inyecta una corriente eléctrica directa en la dirección axial ascendente. En particular, se exploran tres valores 3, 4 y 5 mA. Como fluidos de trabajo se tiene una solución electrolítica a base de las sales de bicarbonato de sodio ($NaHCO_3$) y cloruro de potasio (KCl) disueltas en agua desionizada y a una concentración de 8.6 % en masa a temperatura ambiente.

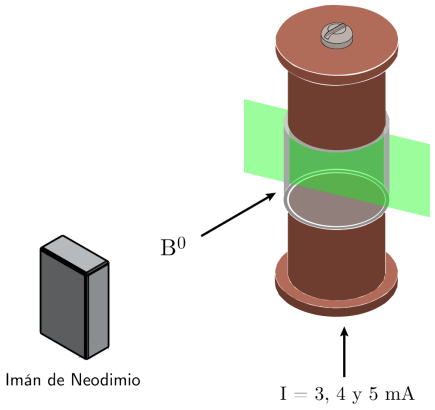


Figura 2.1: Bosquejo del problema de estudio. Tomado del trabajo de Herrera-Ortega [2].

La Tabla 2.1 muestra algunas propiedades físicas de los electrolitos reportadas por el grupo de trabajo [2].

Propiedad	KCl	$NaHCO_3$
Conductividad [S/m]	12.193	5.245
Densidad [kg/m^3]	1.055×10^3	1.059×10^3
Viscosidad [Pa· s]	0.991×10^{-3}	1.262×10^{-3}

Tabla 2.1: Conductividad eléctrica, densidad y viscosidad dinámica de los electrolitos a una concentración en relación de masa/masa del 8.6 %.

A una distancia de 2.5 cm del eje del cilindro se coloca un imán permanente de neodimio (NdFeB). Los imanes están magnetizados en la dirección perpendicular a la superficie de mayor área y son responsables de generar un campo magnético que al interactuar con la corriente eléctrica genera una fuerza de Lorentz que agita al fluido al interior de la cavidad. Para estudiar el efecto del campo magnético (tanto intensidad como distribución espacial) se han usado dos imanes distintos, el primero de ellos rectangular y el segundo cuadrado con dimensiones mostradas en la fig. 2.2.

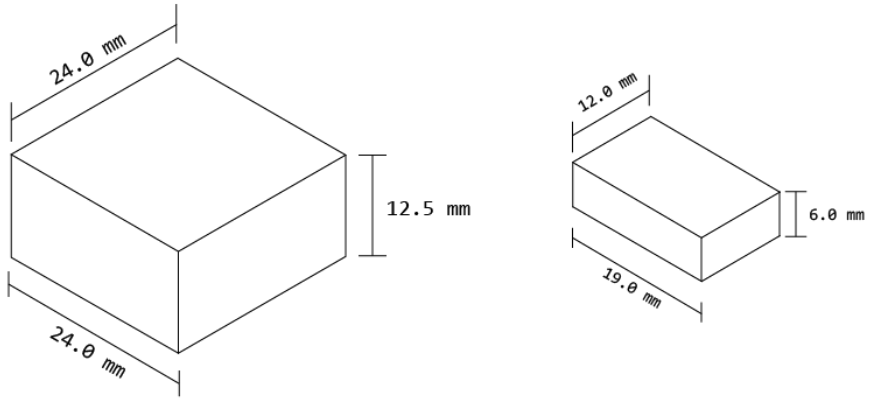


Figura 2.2: Imán de neodimio (NdFeB), magnetizados uniformemente en la dirección de menor grosor.

El montaje experimental completo se muestra en la fig. 2.3 e ilustra la implementación de la técnica PIV. Destaca el haz de luz láser (verde) que ilumina el plano central de la cavidad, una cámara monocromática que permite la captura de imágenes a una tasa de hasta 120 cuadros por segundo y una fuente de poder usada para la corriente eléctrica. Para corregir la aberración óptica de la cavidad cilíndrica, ésta se encuentra inmersa en una caja cuadrada con paredes de vidrio y llena de agua.

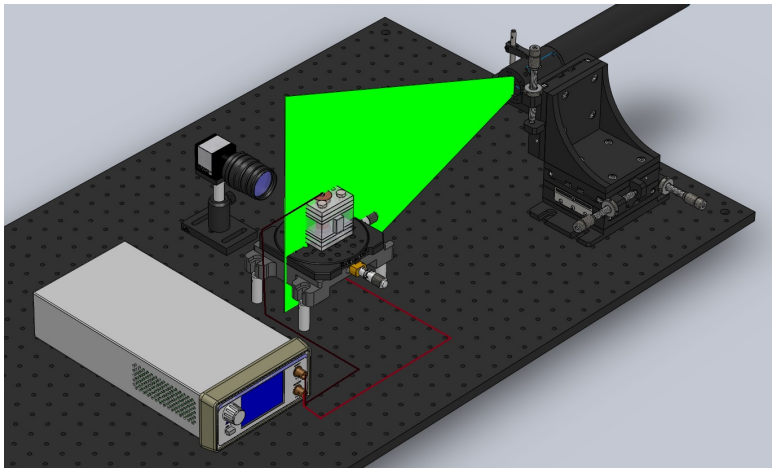


Figura 2.3: Esquema del montaje experimental para medición de campos de velocidad de electrolitos agitados electromagnéticamente en cavidades cilíndricas. Imagen tomada del trabajo de Herrera-Ortega [2].

Las mediciones de velocidad obtenidas servirán para validar la implementación numérica desarrollada en OpenFOAM® que será descrita en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Modelos matemáticos

> *"Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione."*
>
> — John von Neumann

Las ecuaciones aquí descritas, pueden ser encontradas en el basto número de publicaciones y libros que analizan los fenómenos electromagnéticos así como la dinámica de los fluidos. En este trabajo nos basaremos en la formulación descrita en el trabajo de Beltrán [24] y Furlani [25].

A manera de simplificar o simplemente definir el estudio es conveniente establecer las hipótesis mediante las cuales será analizado el fenómeno [26]:

- Medio continuo,
- Fluido newtoniano e incompresible,
- Isotérmico,
- Homogeneidad e isotropía de los materiales,
- Campo magnético inducido despreciable (Reynolds magnético pequeño).

Las ecuaciones están desarrolladas de manera macroscópica, las interacciones moleculares no están consideradas, por lo que se cumple la hipótesis del continuo, esto es que el límite dado por

$$\lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\sum \Delta m}{\Delta V} \right) = \rho, \tag{3.1}$$

donde ΔV es un volumen en algún fluido el cual encierra una gran cantidad de moléculas y Δm la masa de cualquier molécula dentro de ΔV, converge mucho antes de que el volumen decrezca al tamaño de una molécula [3].

La densidad y la viscosidad se mantienen constantes.

El sistema se mantiene isotérmico, dado que el efecto Joule y los efectos de la difusividad viscosa son despreciados, así que también lo son otros efectos de flotación.

La homogeneidad e isotropía de los materiales involucra por sí misma una simplificación, la cual no sería valida si las propiedades de los materiales variaran con la temperatura.

La aproximación por Reynolds magnético bajo es válida a velocidades de flujo obtenidas en laboratorio, como lo es el caso del presente estudio, lo que implica que las líneas de campo magnético no son arrastradas por el fluido, por tanto se mantienen estáticas, como lo explica Davidson [4].

3.1 Electromagnetismo

A continuación se muestran las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{3.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3.5}$$

Las ecs. (3.2) y (3.3), corresponden a la ley de Gauss para el campo eléctrico y magnético respectivamente, la ec. (3.4) a la ley de Ampère y la ec. (3.5) a la ley de inducción de Faraday. Siendo $\mathbf{E}$ la intensidad de campo eléctrico, $\mathbf{D}$ la densidad de flujo eléctrico, $\mathbf{H}$ intensidad de campo magnético, $\mathbf{B}$ densidad de campo magnético, $\mathbf{J}$ la densidad de corriente eléctrica y ρ_e la densidad de carga volumétrica.

3.2 Relaciones constitutivas

Las siguientes ecuaciones brindan información sobre el comportamiento del medio por el cual atraviesan los campos electromagnéticos. Podemos entonces obtener una ecuación constitutiva mediante la divergencia de la ec. (3.4) y aplicando la identidad del cálculo vectorial $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{K}) = 0$ (siendo $\mathbf{K}$ cualquier campo vectorial), obtenemos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}),$$

y la combinamos con la derivada temporal de la ec. (3.2),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho_e}{\partial t},$$

obtenemos una ecuación de campo expresada como una ecuación de conservación de carga libre

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0. \tag{3.6}$$

Otras ecuaciones constitutivas por la convención de Sommerfeld [27] son:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \tag{3.7}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{3.8}$$

donde $\mathbf{M}$ es el vector de magnetización y $\mathbf{P}$ el vector de polarización del medio, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A y $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m la permeabilidad y permitividad del vacío, respectivamente.

Una de las ecuaciones fenomenológicas a considerar es la ley de Ohm, la cual para el caso de un medio conductor en movimiento puede escribirse como:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \tag{3.9}$$

donde σ es la conductividad eléctrica, $\mathbf{u}$ es la velocidad del medio conductor y $\mathbf{B}$ es un campo magnético externo.

Dado que la velocidad de flujo de los fluidos conductores a nivel laboratorio es pequeña en comparación con la velocidad de la luz, la fuerza de Lorentz puede escribirse como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{3.10}$$

De igual manera el término correspondiente a la corriente de desplazamiento $\partial \mathbf{D}/\partial t$ de la ec. (3.4) puede despreciarse [4], reescribiéndose como se muestra a continuación

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \tag{3.11}$$

Bajo las suposiciones mencionadas al inicio de la sección, podemos reducir las relaciones constitutivas a

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \tag{3.13}$$

3.2.1 Dinámica de fluidos

Las ecuaciones fundamentales en la dinámica de fluidos son la ecuación de continuidad o conservación de masa

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3.14}$$

y la ecuación de conservación de momento lineal, que podemos expresar como

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}_f, \tag{3.15}$$

donde $\mathbf{T}$ el tensor de esfuerzos de segundo orden, ρ la densidad del fluido y $\mathbf{b}_f$ representa las fuerzas de cuerpo, y para nuestro caso $\mathbf{b}_f$ corresponde a la fuerza de Lorentz. La ec. (3.15) puede ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla (P/\rho) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{3.16}$$

siendo ν el coeficiente de viscosidad cinemática.

3.2.2 Parámetros adimensionales

En la MHD resulta de utilidad definir los siguientes parámetros adimensionales:

Nombre	Descripción	Definición
Número de Reynolds	Razón entre las fuerzas inerciales y viscosas	$R_e = \rho U_0 L/\mu$
Número de Hartmann	Razón entre las fuerzas electromagnéticas y viscosas	$H_a = BL\sqrt{\sigma/\mu}$
Número de Stuart	Razón entre las fuerzas electromagnéticas y las inerciales	$N = H_a^2/Re$
Reynolds magnético	Razón entre la advección y la difusión del campo magnético	$R_{em} = \mu_m \sigma U_0 L$

siendo u y L la velocidad y longitud característica, respectivamente, μ y μ_m son los coeficientes de viscosidad y permeabilidad magnética del medio, respectivamente. La derivación de las siguientes ecuaciones de la dinámica de fluidos puede ser verificada con mayor detalle en Peña [3].

3.3 Formulaciones de la MHD

Existen diferentes formulaciones mediante las cuales se puede calcular las corrientes inducidas para dar solución a las ecuaciones de la MHD. A continuación se describen las más estudiadas.

3.3.1 Formulación B

La formulación **B** tiene como base el campo magnético inducido, descrito por la ec. (3.11) y haciendo uso de la ec. (3.12), es posible calcular la corriente eléctrica en un medio conductor como

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_m} \nabla \times \mathbf{B}^i, \tag{3.17}$$

donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente eléctrica del medio conductor, $\mathbf{B}^i$ es el campo inducido en el medio y μ_m es la permeabilidad magnética. Una ecuación para el campo

magnético inducido puede ser derivada aplicando el operador rotacional a la ec. (3.9), que sustituyendo el campo eléctrico y la corriente haciendo uso de la ecs. (3.5) y (3.17), podemos finalmente obtener la ecuación para el campo magnético inducido

$$\frac{\partial \mathbf{B}^i}{\partial t} = \nabla \cdot (\eta \nabla \mathbf{B}^i) - \nabla(\eta \nabla \cdot \mathbf{B}^i) + \mathbf{S}_B - \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t}, \tag{3.18}$$

donde $\mathbf{S}_B = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}^0) = (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B}^0$ es el término fuente, con $\mathbf{B}^0$ el campo magnético impuesto y $\eta = 1/\mu_m \sigma$ es la difusividad magnética. Asumiendo que η es constante debido a la isotropía y homogeneidad del medio, la ec. (3.18) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{B}^i}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{i} + \mathbf{S}_B - \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t}. \tag{3.19}$$

Finalmente, las ecs. (3.14), (3.16)-(3.18) ó (3.19), forman un sistema de ecuaciones cerrado [24].

3.3.2 Formulación j

La formulación j hace uso de la corriente inducida como variable electromagnética. Esta formulación fue propuesta por Smolentsev et al. [19], y presenta algunas ventajas con respecto a las otras formulaciones. La ecuación puede deducirse al aplicar el operador rotacional a la ec. (3.18), y considerando las propiedades físicas como constantes para todo el dominio se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{J} - \eta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{S}_J, \tag{3.20}$$

donde el término fuente, $\mathbf{S}_J$, está dado por

$$\mathbf{S}_J = \frac{1}{\mu_m} \nabla \times \mathbf{S}_B. \tag{3.21}$$

Al igual que para el campo magnético inducido, también las ecs. (3.14), (3.16) y (3.20) forman un sistema de ecuaciones cerrado para la formulación j [19].

3.3.3 Formulación ϕ

En la formulación para el potencial escalar eléctrico, ϕ, la densidad de corriente eléctrica se calcula usando la ec. (3.9). En particular, el campo eléctrico puede calcularse como el gradiente de un potencial, por lo que la ley de Ohm ahora puede escribirse como:

$$\mathbf{J} = \sigma(-\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{3.22}$$

Haciendo uso de la ec. (3.6), considerando que no existen variaciones de la densidad de carga en el tiempo, y que la conductividad eléctrica es constante, es posible obtener una ecuación de Poisson para el potencial escalar eléctrico:

$$\nabla^2\phi - S_\phi = 0, \tag{3.23}$$

donde $S_\phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Por tanto las ecs. (3.14), (3.16), (3.22), (3.23) constituyen el sistema de ecuaciones que caracterizan a la formulación-ϕ [24].

Algunas ventajas que presenta la formulación-ϕ es que es una ecuación escalar la que tiene que ser resuelta, en vez de ecuaciones vectoriales como (3.20) y (3.18), incrementando por tanto la velocidad de cálculo. Solo la densidad de corriente $\mathbf{J}$ es influenciada por la velocidad $\mathbf{u}$, mientras el campo magnético esta determinado sólo por las condiciones iniciales y de frontera. Además la implementación de las condiciones de frontera es más sencilla, por tanto se elige como la mejor opción para el presente trabajo.

3.4 Análisis magnetostático

Para el análisis y modelado del campo magnético generado por el imán permanente consideramos a éste como un medio homogéneo, isotrópico y estacionario. Por tanto podemos realizar un análisis magnetostático mediante la ec. (3.11), bajo el supuesto de la no existencia de monopolos magnéticos, y que la densidad de corriente eléctrica es igual a cero ($\mathbf{J} = 0$), entonces la ec. (3.11) se reescribe como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \tag{3.24}$$

3.4.1 Modelo de carga

En el modelo de carga se considera que el imán está constituido por una distribución de carga magnética, la cual será utilizada a manera de término fuente.

Dado el carácter irrotacional de la ec. (3.24), podemos escribir la intensidad de campo magnético como el campo vectorial proveniente del gradiente negativo de un campo potencial escalar, Φ_M. Esto se escribe como

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m, \tag{3.25}$$

que sustituyendo la ec. (3.25) en la ec. (3.7) tenemos

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} - \nabla\Phi_m). \tag{3.26}$$

Finalmente introducimos la ecuación constitutiva anterior en la ec. (3.3) y obtenemos una ecuación de Poisson para el potencial escalar magnético Φ_m,

$$\nabla^2\Phi_m = \nabla \cdot \mathbf{M}. \tag{3.27}$$

La teoría matemática antes mostrada será la utilizada para modelar el sistema físico descrito en el Capítulo 2

Capítulo 4

Metodología numérica

Una vez definida la geometría a resolver y el modelo MHD a usar, hacemos uso de las librerías OpenFOAM® para simular el problema descrito en el Capitulo 2 mediante el método de volumen finito.

4.1 Método de volumen finito

El método de volumen finito es una técnica numérica que transforma las ecuaciones diferenciales parciales que representan leyes conservativas sobre un domino en ecuaciones algebraicas discretas sobre volúmenes finitos (elementos o celdas). De una forma semejante a las diferencias finitas o elemento finito, el primer paso en el proceso de solución es la discretización del dominio geométrico, el cual, en FVM, se fracciona en elementos o volúmenes pequeños que no se superponen unos con otros. Las ecuaciones diferenciales parciales son entonces discretizadas o transformadas en ecuaciones algebraicas mediante la integración de éstas sobre cada volumen. El sistema de ecuaciones es entonces resuelto calculando los valores de cada variable dependiente para cada uno de los volúmenes [3].

En FVM, algunos términos en las ecuaciones de conservación son transformados en flujos que pasan sobre la superficie de los volúmenes que son evaluados sobre las caras de estos. Ya que el flujo que entra en algún volumen dado es igual al flujo que sale hacia el volumen adyacente, FVM es entonces estrictamente conservativo. Esta propiedad inherente es debida al uso del teorema de la divergencia de Gauss para la integración de las ecuaciones gobernantes del problema, convirtiéndolo en el método preferido en la CFD. Otro atributo importante es que puede ser formulado en el espacio físico sobre mallas poligonales no estructuradas. Finalmente, es bastante sencillo la implementación de diversas condiciones de frontera, dado que las variables primitivas son evaluadas en los centroides de los volúmenes, y no sobre sus fronteras [3].

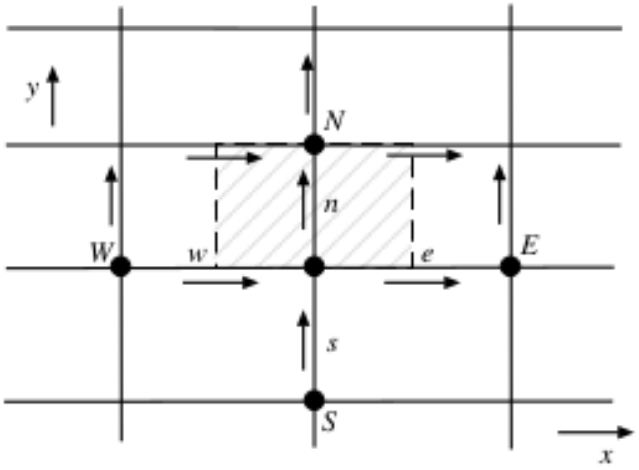


Figura 4.1: Diagrama del método de volumen finito. Imagen tomada de Peña [3]

Las siguientes secciones describen el uso de OpenFOAM® para simulaciones del campo magnético y del flujo.

4.2 Simulaciones de campo magnético

Como se ha descrito anteriormente el flujo al interior del cilindro es generado por la interacción de un campo magnético externo y una corriente eléctrica. Los patrones de flujo que son de interés en este trabajo son debidos a la presencia de un campo magnético generado por imanes permanente de neodimio. El primero tiene dimensiones de $12.5 \times 24 \times 24$ mm y le llamaremos imán cuadrado mientras que el segundo tiene de dimensiones de $6 \times 13 \times 19$ mm y le llamaremos imán rectangular. Las dimensiones para ambos están indicadas en las direcciones x, y y z, respectivamente.

Las geometrías son generadas mediante la librería **blockMesh**, el mallador de OpenFOAM®, creando las geometrías de los imanes respecto a las dimensiones dadas en el parrafo anterior, con un mallado hexaédrico de 50 elementos en las direcciones x, y, z, (ver fig. 4.2). Haciendo la consideración de que el campo magnético tiende a cero en el infinito, se elije un dominio computacional para que el campo quede bien definido, con una distancia desde las caras del imán hacia el borde del dominio computacional de 0.5 m conteniendo únicamente aire.

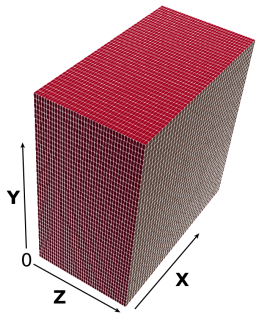


Figura 4.2: Geometría del imán cuadrado, con mallado hexaédrico de 50 elementos en x, y, z.

Tanto el dominio computacional como las paredes del imán fueron construidas mediante 6 pirámides truncas acopladas, cuyas paredes superiores corresponden a cada una de las caras de la geometría como se muestra en la fig. 4.3. Para ambos imanes se usa que el dominio computacional de aire con 750000 celdas.

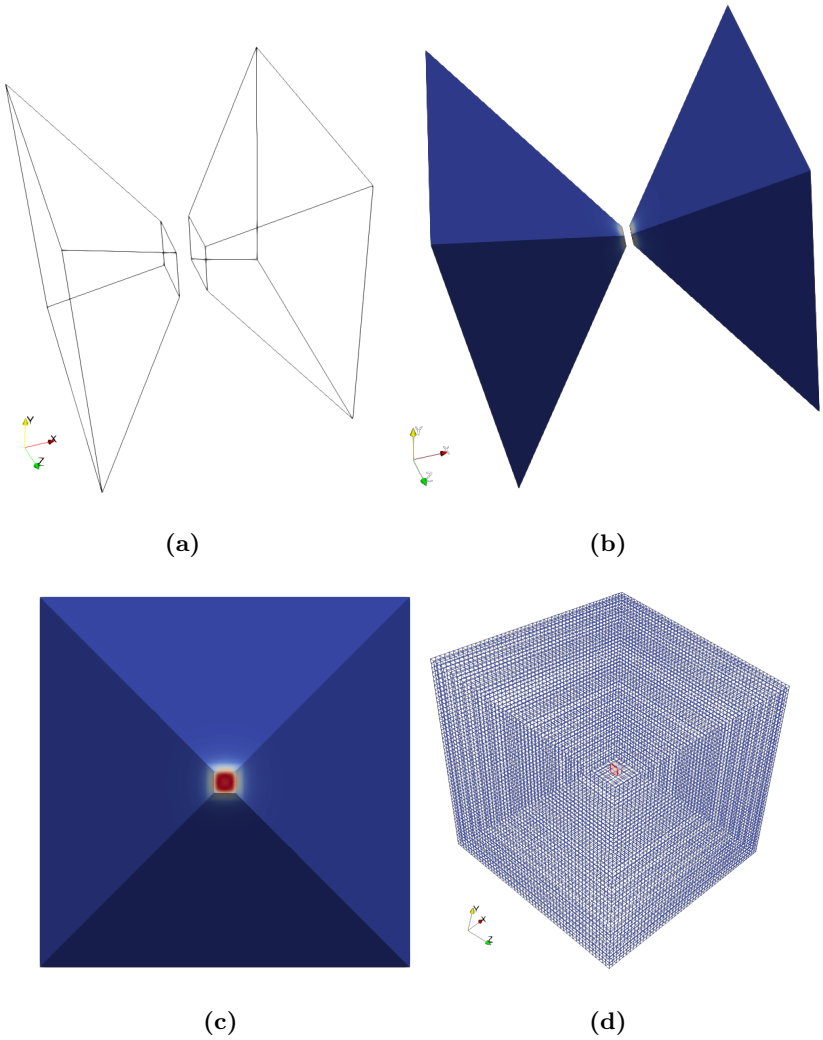


Figura 4.3: Geometría del dominio computacional. a) Diagrama de las pirámides truncas que corresponden a los polos del imán. b) Malla de las pirámides truncas, se muestra sólo con las caras paralelas. c) Vista frontal de una pirámide trunca. d) Dominio computacional completo.

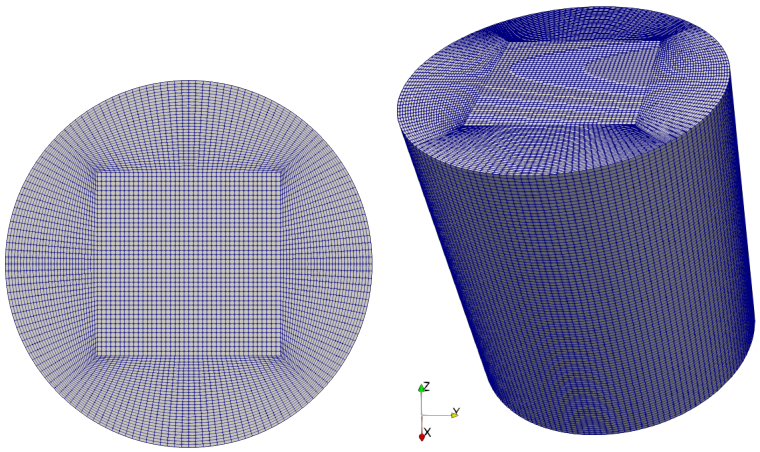
Para resolver el modelo de carga usando OpenFOAM se usa el solver **magneticFOAM**, la solución analítica de este modelo se encuentra en el Apéndice A. Dicho solver implica fijar valores para las variables de magnetización de saturación (M_s), permeabilidad relativa del medio (μ_m) y el potencial escalar magnético (Φ_m). Para nuestro caso se tiene $M_s = 1.1 \times 10^6$ A/m, $\Phi_m = 9715$ A para el imán cuadrado, $M_s = 1.22 \times 10^6$ A/m, $\Phi_m = 5644$ A para el imán rectangular y $\mu_m = 1.0$ para la permeabilidad relativa del

medio.

Usando la herramienta **topoSet** se marcan las caras de los imanes en donde se impone la orientación de la magnetización. Una vez realizadas las simulaciones, se utilizó el mismo dominio computacional para definir la solución analítica dada por Furlani [27] para cada una de las componentes del campo. Para dicho propósito se uso la herramienta **funkySetFields** que permite definir distintas funciones (algebraicas, trigonométricas, etc.) en OpenFOAM®.

4.3 Simulaciones de la dinámica del flujo

Para simular el flujo de interés, se construye un cilindro de diámetro $D = 1.75 \times 10^{-3}$ m y altura $H = 1.90 \times 10^{-3}$ m. Dicho cilindro se divide en cinco secciones para construir una malla hexaédrica usando la técnica O-grid. De igual forma se usó la herramienta **blockMesh**, con 100 elementos uniformemente distribuidos a lo largo del diámetro y 100 elementos para la altura, teniendo un total de $640,000$ elementos hexaédricos. Se definieron las tapas superiores e inferiores, así como la cara lateral del cilindro para definir condiciones de frontera para las variables involucradas.



(a) **(b)**

Figura 4.4: a) Tapa superior de la cavidad cilíndrica b) Mallado 3D de la cavidad.

4.4 Algoritmo de solución

A continuación se describe el algoritmo utilizado y el método de interpolación implementado para la reconstrucción de **J** en el centro de la celda, de manera que se puede

asegurar la conservación tanto del momento como de la carga. En la fig. 4.5 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo.

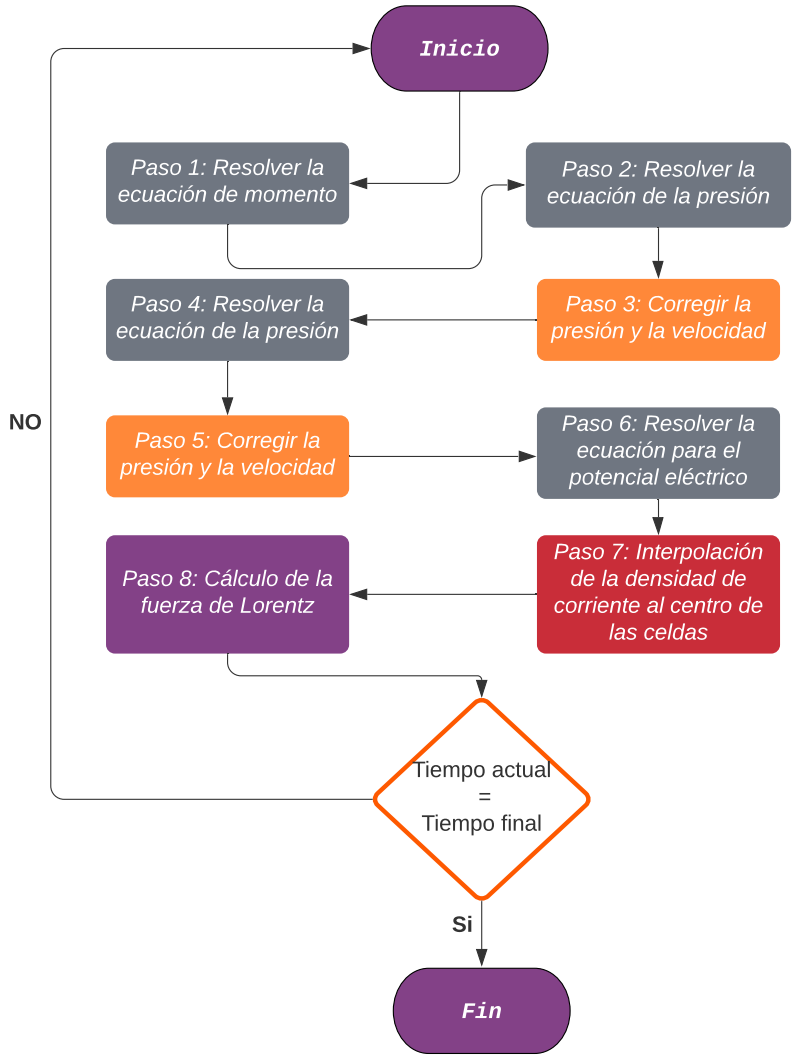


Figura 4.5: Diagrama de flujo del algoritmo.

1. Creación de la distribución inicial (condiciones iniciales) de $\mathbf{u}$, p y ϕ_u (velocidad de flujo), también se inicializa la fuerza de Lorentz ($\mathbf{F}$).
2. Discretización y solución de la ecuación de momento, para obtener una predicción del campo de velocidad para el algoritmo PISO [28],

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_u, \mathbf{u}) - \nabla^2(\nu, \mathbf{u}) - (1/\rho)\mathbf{F} = -\nabla(p).$$

3. Ejecución del algoritmo PISO para dos iteraciones. Una ecuación de Poisson es resuelta para p y así obtener el campo de presión el cual posteriormente será utilizado para corregir el campo de velocidad predicho en el paso anterior.

4. La ecuación de continuidad es resuelta para estimar los errores y las condiciones de frontera para la velocidad son actualizadas.

5. Evaluación del término de flujo magnético ($\mathbf{f_m}$) en las caras de las celdas

$$\mathbf{f_m} = (\mathbf{u} \times \mathbf{B})\&\mathbf{S_f},$$

   mediante el operador producto interno & y $\mathbf{S_f}$ que permite operar sobre las caras de los volúmenes.

6. Se resuelve la ecuación de Poisson para el potencial eléctrico

$$\nabla^2(\phi) - \nabla \cdot \mathbf{f_m} = 0.$$

7. Cálculo del flujo de densidad de corriente (j_f) a partir del gradiente normal (∇_{sn}) del potencial eléctrico sobre las caras de las celdas. El valor al centro de la cara de la celda es considerado

$$j_f = -\nabla_{sn}\phi\&\mathbf{S_f} + \mathbf{f_m}.$$

8. Reconstrucción de la densidad de corriente en el centro del volumen ($\mathbf{J}_c$) implementando un esquema consistente: una interpolación por volumen entre el centro de la cara del volumen ($\mathbf{r}_f$) y el centro de este ($\mathbf{r}_p$)

$$\mathbf{J}_c = \sum_{f=1}^{nf} j_f(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{S}_f.$$

9. Nuevamente se vuelve a calcular la fuerza de Lorentz a partir la distribución conservativa de la densidad de carga

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}_c \times \mathbf{B}.$$

El código del algoritmo anteriormente descrito se encuentra en el Apéndice C.

Siendo OpenFOAM® una herramienta computacional que resuelve ecuaciones diferenciales parciales, mediante el uso de volúmenes finitos se utilizan diferentes esquemas de discretización de las ecuaciones. En nuestro caso se utilizó la discretización de Euler para el término temporal, el esquema Gauss lineal para los gradientes y para la divergencia de U se usó Gauss lineal - Upwind, que permite el uso de Gauss lineal cuando la velocidad es pequeña y el esquema Upwind cuando la velocidad se incrementa y de esta manera tener una mejor interpolación de la velocidad. Para los términos laplacianos de igual manera fue usado el Gauss lineal. En la Tabla 4.1 se resumen los esquemas utilizados.

Término	Esquema
Temporal	Euler
Gradiente	Gauss lineal - Upwind
Divergencia	Gauss lineal - Upwind
Laplaciano	Gauss lineal

Tabla 4.1: Tabla de esquemas de interpolación.

Para el caso de los métodos de solución de los sistemas lineales, se seleccionó el gradiente preconjugado para la presión así como para el potencial eléctrico, y smoothSolver (Gauss-Seidel) para la velocidad, que permite una mayor estabilidad. En lo que respecta al algoritmo PISO, se estableció 2 correctores para la velocidad así como 1 corrector para las celdas no ortogonales, en el caso del potencial eléctrico se usó sólo un corrector y de igual manera un sólo corrector de no ortogonalidad, manteniendo el criterio de convergencia de Courant, $Co < 0.5$ para la obtención de resultados físicamente posibles.

La validación de este código fue mediante la solución al problema de Hartmann. Los resultados de la validación del código así como la solución analítica de este mismo problema se encuentran en el Apéndice B.

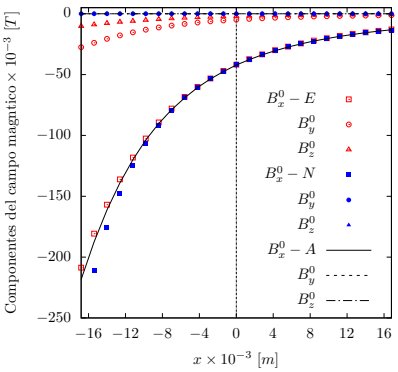
Capítulo 5

Resultados y discusión

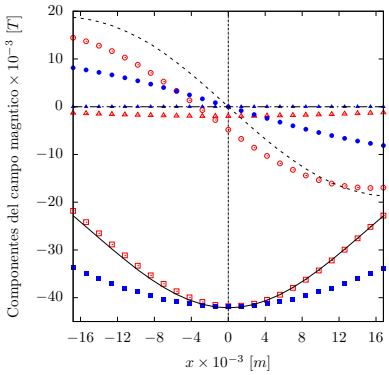
En este capítulo se presentan resultados de las simulaciones para las dos distintas configuraciones de imanes consideradas en nuestro estudio. También, se presentan los patrones de flujo generados por dichos campos magnéticos al interior de la cavidad cilíndrica para cada uno de los dos fluidos de trabajo, y para los dos valores de corriente eléctrica.

5.1 Campo magnético

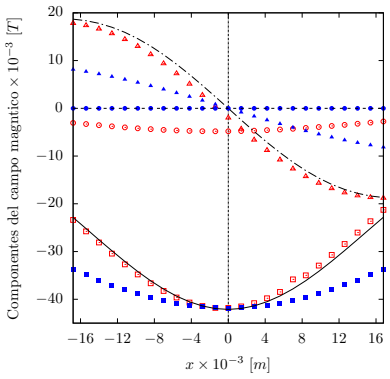
De la solución numérica del modelo de caja para el campo magnético es posible extraer perfiles para cada una de las tres componentes a lo largo de los ejes de simetría de nuestra configuración cilíndrica. Al centro del cilindro se tiene un valor máximo de campo para la componente B_x^0 del campo. Para el imán cuadrado se alcanzan valores de 41.83, 42.21 y 42.25 mT; mientras que, para el rectangular de 13.9, 13.97 y 13.92 mT, obtenidos de mediciones experimentales [2], simulación y solución analítica [27], respectivamente. Los perfiles para el imán cuadrado y rectangular se muestran en las figs. 5.1 y 5.2, respectivamente. Como se observa de ambas figuras, existe una buena comparación tanto cualitativa como cuantitativa para todas las componentes de ambos imanes.



(a)

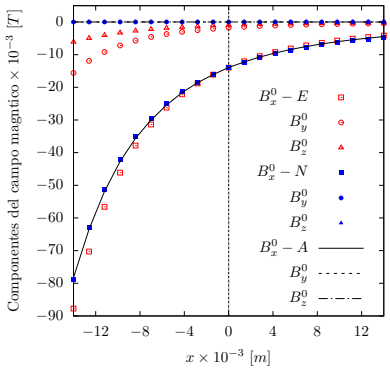


(b)

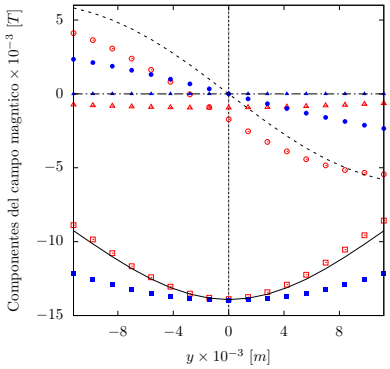


(c)

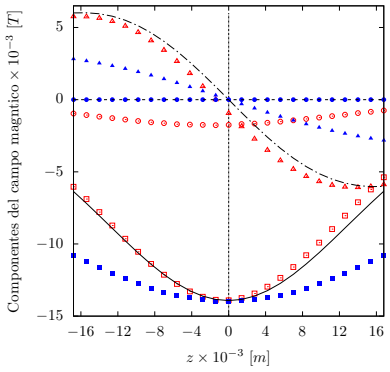
Figura 5.1: Perfiles de campo magnético para el imán cuadrado. Comparación entre resultados experimentales (-E), numéricos (-N) y de la solución analítica (-A) a lo largo de los ejes: a) x, b) y y c) z.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.2: Perfiles de campo magnético para el imán cuadrado. Comparación entre resultados experimentales (-E), numéricos (-N) y de la solución analítica (-A) a lo largo de los ejes: a) x, b) y y c) z.

Como se observa en las figuras anteriores, tanto para el imán cuadrado como para el rectangular la intensidad del campo magnético decrece conforme uno se aleja de la dirección x, además la componente B_x del campo en las direcciones y y z tiene forma parabólica y las componentes B_y y B_z son antisimétricas. Es interesante que, los resultados de la solución analítica para las componentes del campo, ajustan de mejor forma con las mediciones experimentales en comparación con las simulaciones numéricas. Con base en lo anterior, y para las simulaciones del flujo se definirán dichas funciones para cada una de las componentes en OpenFOAM®, permitirá un ahorro en el tiempo de cómputo de las simulaciones al resolverse solamente el dominio ocupado por el electrolito.

5.2 Patrones de flujo

Como ya se ha descrito anteriormente, el flujo es generado por una fuerza de Lorentz. Suponiendo que la corriente es puramente axial y que la componente principal del campo magnético está en la dirección x, se tiene que la componente principal de la fuerza de Lorentz estaría en la dirección azimutal. Un bosquejo se muestra en la fig. 5.3. Con objeto de mantener corta la presentación de resultados se analizan a detalle los casos para la corriente más alta que es de 5 mA, para ambos campos magnéticos y electrolitos. Para el caso de corrientes de menor intensidad, los patrones de flujo son similares sólo que de menor magnitud.

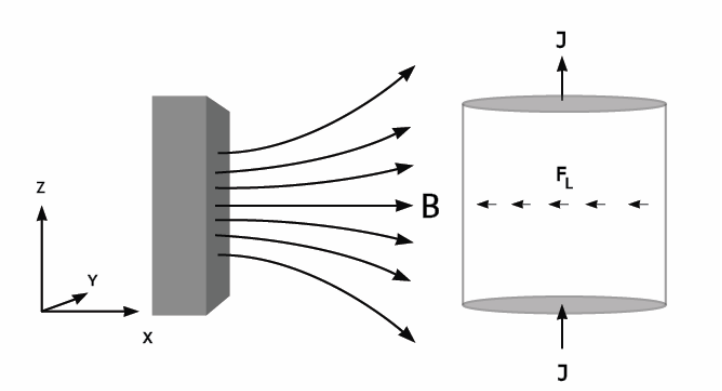


Figura 5.3: Representación esquemática de los principales campos vectoriales en la cavidad cilíndrica.

Dado que el campo magnético es no uniforme se esperan mayores velocidades en la pared del cilindro cercana al imán. Dependiendo de la intensidad del campo magnético el flujo también puede ser más intenso en la región central del cilindro, puesto que la corriente se asume constante. La fig. 5.4 muestra isocontornos para la magnitud de

la velocidad del flujo para el campo magnético generado por el imán cuadrado, una corriente de 5 mA y usando al electrolito de KCl como fluido de trabajo. De los planos de simetría mostrados en la fig. 5.4(a), es claro que se tiene un flujo tridimensional confinado en el cilindro. En la fig. 5.4(b) se muestran menores magnitudes en el plano y-z que para el plano x-z mostrado en la fig. 5.4(c) y que al igual que la fig. 5.4(d) confirma que las mayores velocidades se obtienen para cuando se está cerca de la pared más cercana al imán y casi nula al centro del cilindro. En general, los planos verticales (figs. 5.4(b) y 5.4(c)) muestra que el patrón de flujo forma una especie de dipolo, un par de celdas rotando en direcciones opuestas con una velocidad muy baja o casi nula al centro. Para este campo magnético y corriente se obtienen las mayores velocidades, obteniéndose una magnitud de hasta 1.4 mm/s. y dado que el campo magnético es constante debido a que proviene de un imán permanente la intensidad de la agitación del fluido depende enteramente de la magnitud de corriente eléctrica suministrada.

La fuerza de Lorentz se encuentra localizada en las cercanías del campo magnético por tanto ésta es la región donde existe una mayor velocidad del fluido como se puede observar en las figs. 5.4 - 5.7.

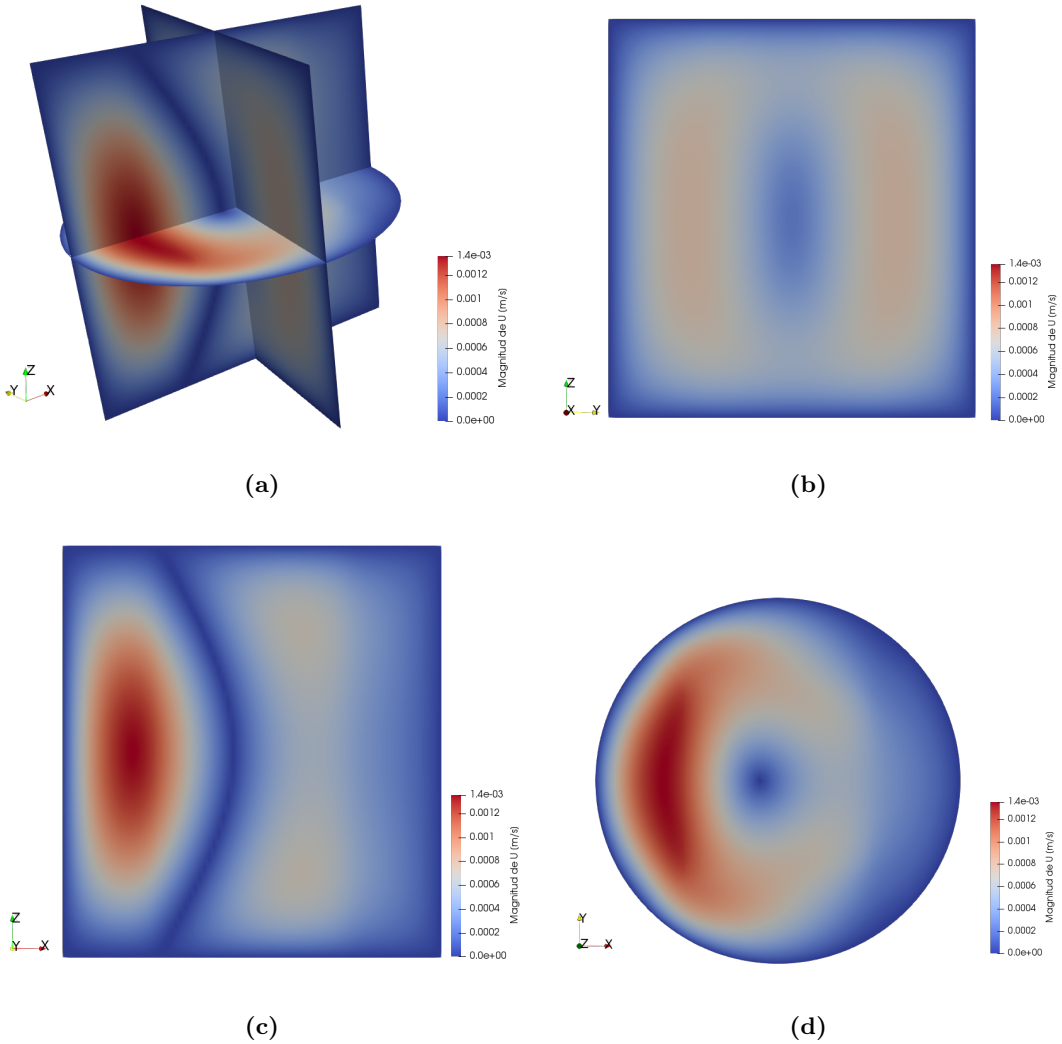


Figura 5.4: Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán cuadrado, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de KCl. (a) Planos de simetría, (b) y-z para $x = 0$, (c) x-z para $y = 0$, y (d) x-y para $z = 0$.

Cuando se usa el electrolito de $NaHCO_3$ como fluido de trabajo, se observa en la fig. 5.5 prácticamente el mismo patrón de flujo, sólo que, interesentamente la máxima velocidad alcanzada es ligeramente menor (1.1 mm/s), debido a un menor valor de la conductividad eléctrica del fluido.

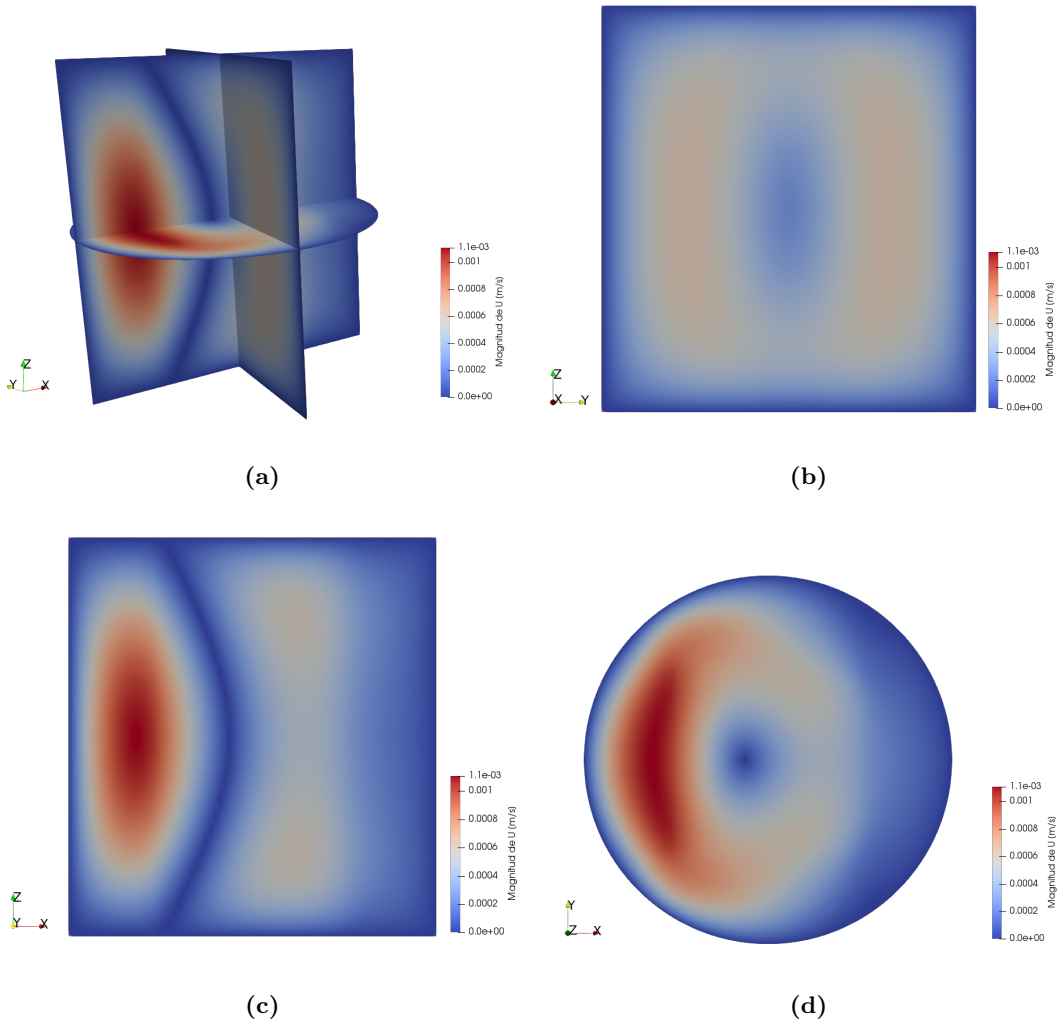


Figura 5.5: Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán cuadrado, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de $NaHCO_3$. (a) Planos de simetría, (b) y-z para $x = 0$, (c) para $y = 0$, y (d) x-y para $z = 0$.

Para el caso de las simulaciones donde el campo magnético es producido ahora por el imán rectangular, se obtienen patrones de flujo similares a los reportados para el imán cuadrado, tal como se muestra en las figs. 5.6 y 5.7 que corresponden a los electrolitos de KCl y $NaHCO_3$, respectivamente. Al ser el campo magnético menos intenso las velocidades son menores; sin embargo, para el caso de KCl las velocidades ahora son menores que para cuando se usa $NaHCO_3$. A pesar de que para este último la conductividad eléctrica es menor, tal como ya se ha mencionado.

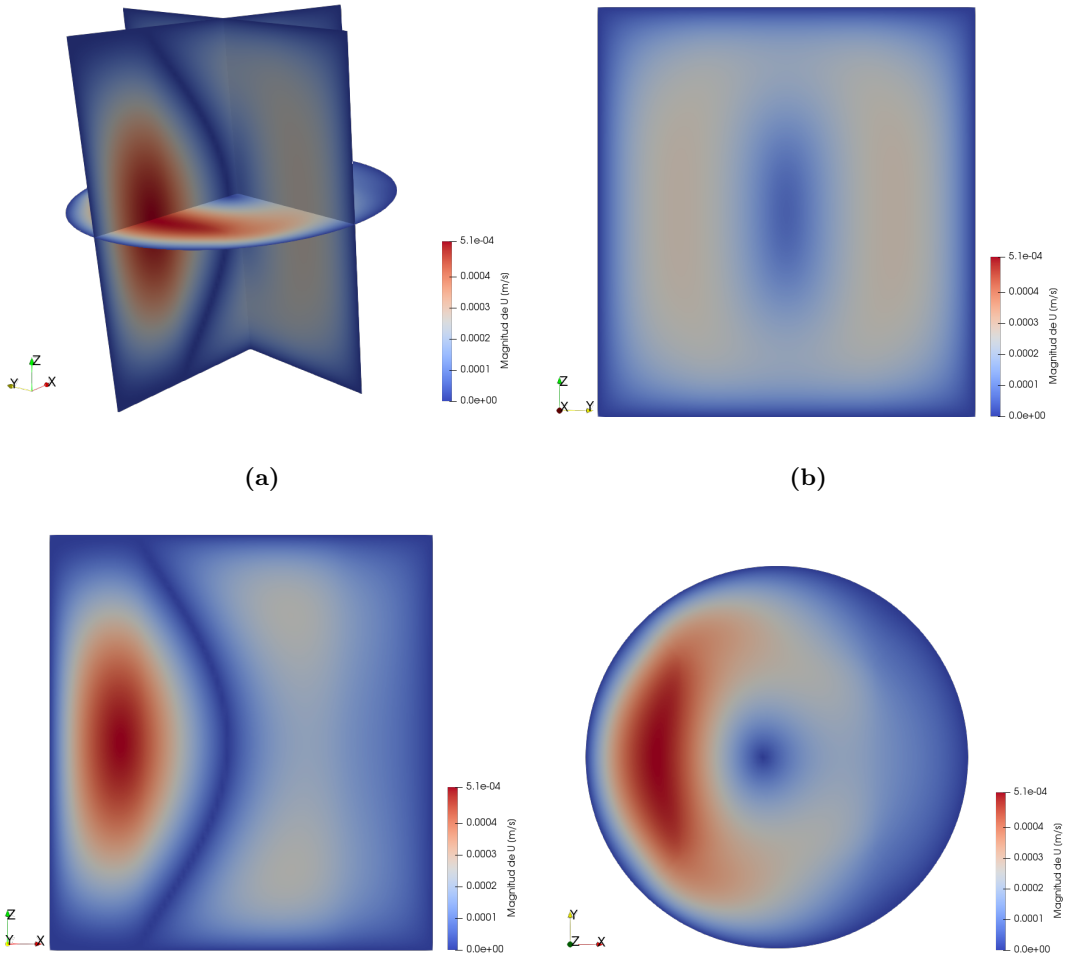


Figura 5.6: Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán rectangular, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de KCl. (a) Planos de simetría, (b) y-z para $x = 0$, (c) x-z para $y = 0$, y (d) x-y para $z = 0$.

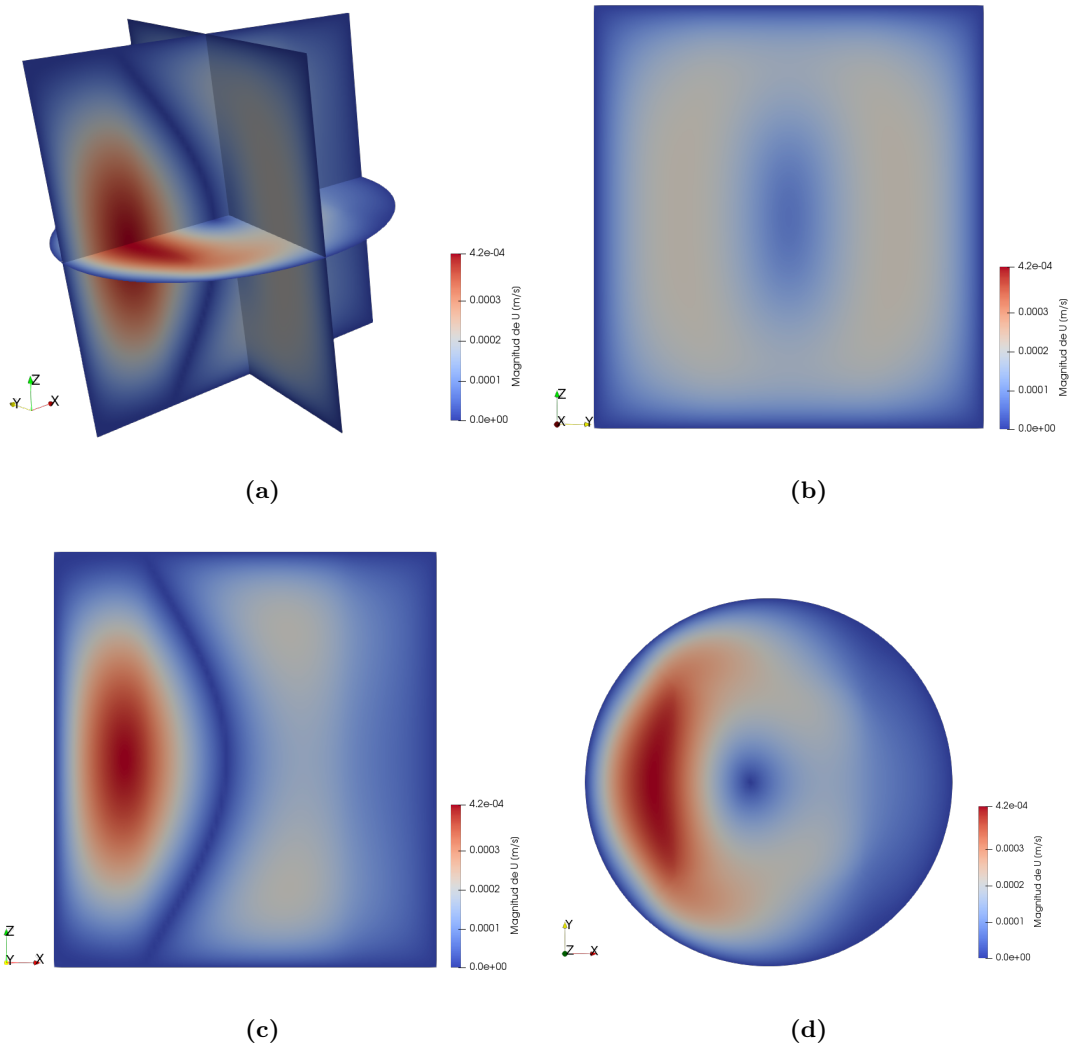


Figura 5.7: Isocontornos de magnitud de velocidad para el campo magnético producido por el imán cuadrado, una corriente de 5 mA y usando el electrolito de $NaHCO_3$. (a) Planos de simetría, (b) plano y-z para $x = 0$, (c) plano x-z para $y = 0$, y (d) plano x-y para $z = 0$.

5.3 Perfiles de velocidad

Para validar los resultados numéricos se extraen perfiles de las componentes de velocidad en los ejes de simetría y se comparan con mediciones experimentales reportadas por el grupo de trabajo y brevemente descritas en secciones anteriores. La fig. 5.8 muestra dicha comparación para el imán cuadrado y una corriente de 5 mA, para ambos

electrolitos. Como se observa, los resultados numéricos describen cualitativamente bien la forma de los perfiles experimentales (puntos), aunque para la componente v de la velocidad los órdenes de magnitud obtenidos numéricamente son mayores. En particular, la componente v vs. z muestra perfiles de flujo en forma de M, característicos de flujos generados por campos magnéticos localizados [24], mientras que a lo largo de la dirección y son de forma parabólica. Situación similar a lo observado para el problema de Hartmann, donde los perfiles en la dirección perpendicular al campo son parabólicos y los paralelos al campo son planos, ver Apéndice B. Como se espera la componente w es de menor magnitud lo que se confirma tanto de los resultados de las simulaciones como de los experimentos.

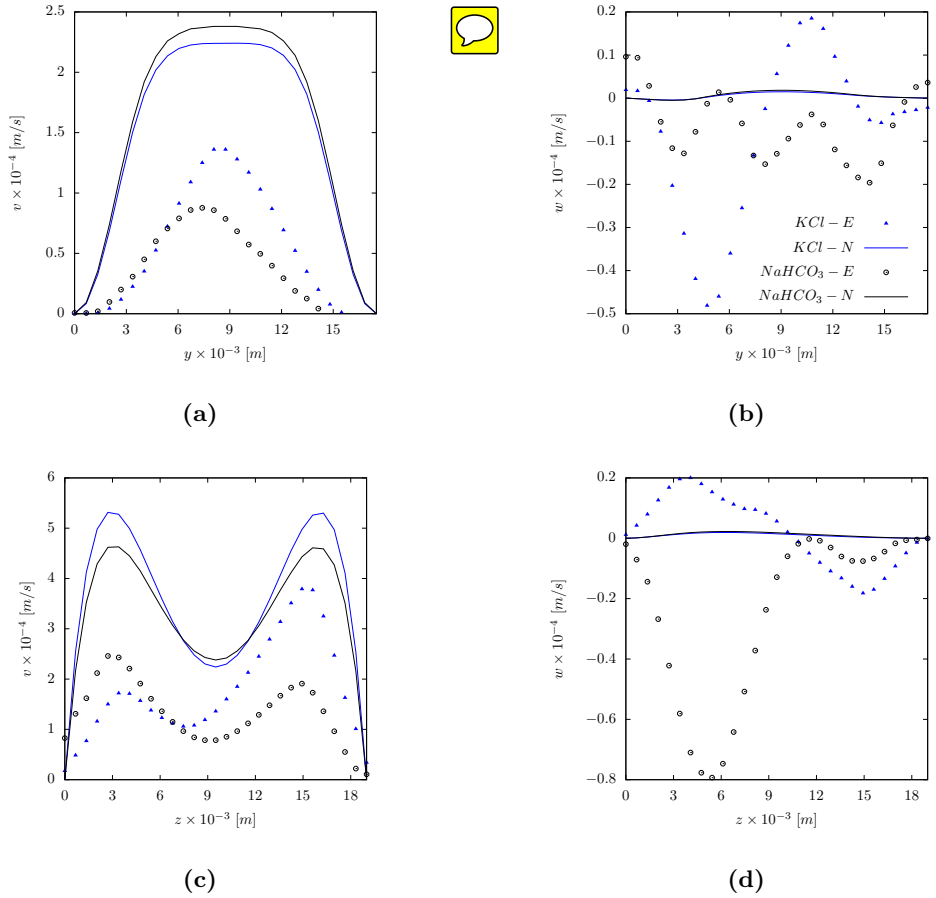


Figura 5.8: Comparación numérico-experimental de perfiles de velocidad para las distintas componentes de la velocidad a lo largo de los ejes de simetría para el campo magnético del imán cuadrado. (a) v vs. y para $x = z = 0$, (b) w vs. y para $x = z = 0$, (c) v vs. z para $x = y = 0$, y (d) w vs. z para $x = y = 0$.

La fig. 5.9 muestra la comparación de perfiles de velocidad ahora para el caso del campo magnético producido por el imán rectangular. Nuevamente se observa una buena comparación cualitativa, al igual que mayores magnitudes para los resultados de la simulación en comparación con los experimentales. Es importante hacer notar que las magnitudes de los perfiles son menores y que para el caso de la componente v a lo largo de la coordenada z no se tiene un perfil en forma de M para el electrolito KCl, mientras que si se observa dicha forma para el electrolito $NaHCO_3$ esto puede explicar la menor magnitud de la velocidad en los patrones de flujo para el electrolito KCl cuando se usa un campo como el del imán rectangular.

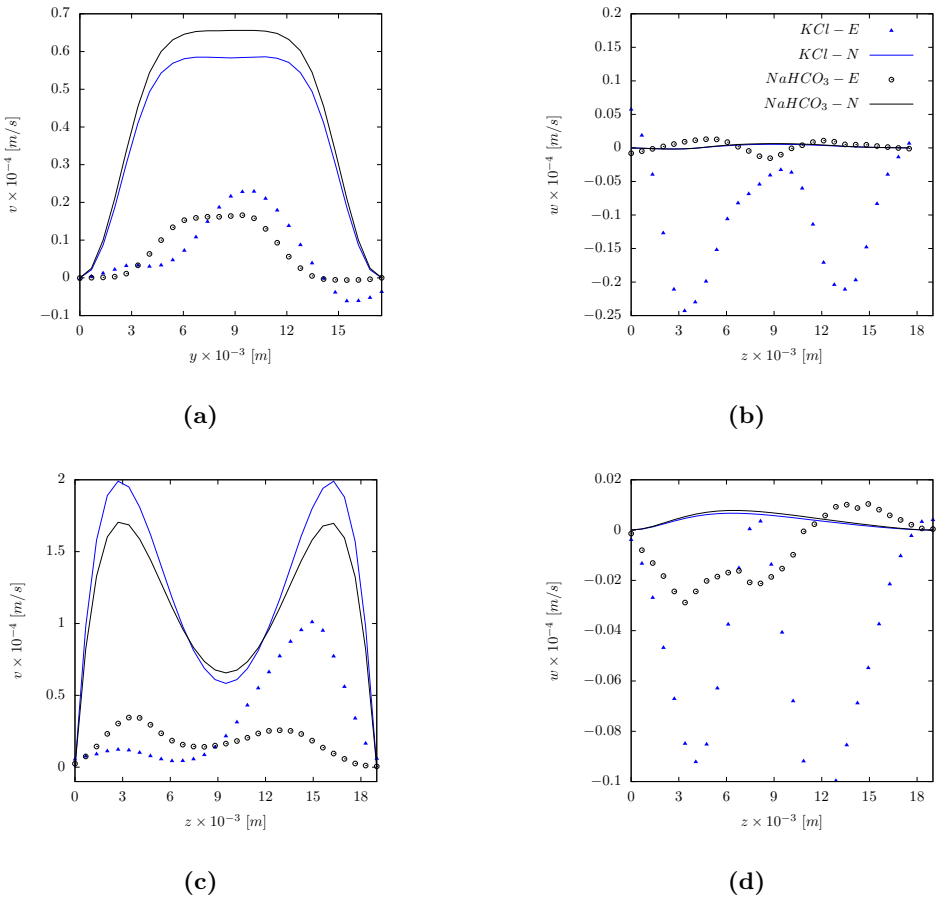


Figura 5.9: Comparación numérico-experimental de perfiles de velocidad para las distintas componentes de la velocidad a lo largo de los ejes de simetría para el campo magnético del imán rectangular. (a) v vs. y para $x = z = 0$, (b) w vs. y para $x = z = 0$, (c) v vs. z para $x = y = 0$, y (d) w vs. z para $x = y = 0$.

Apartir de los resultados ya mostrados, podemos verificar que el solver desarrollado en OpenFOAM® fue capaz de reproducir de manera cualitativa los resultados experimentales obtenidos previamente por Herrera 2, siendo este uno de los objetivos del presente trabajo.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

"En busca de valores propios, vectores propios, espacios propios y el amor propio."

— Gallardovsky

Motivados por el desarrollo de técnicas de medición de flujo de fluidos conductores en el grupo de trabajo, se ha desarrollado de forma paralela herramientas de software como la aquí presentada. El uso de herramientas de software libre para la simulación de flujos MHD resulta relevante dados los recientes desarrollos tecnológicos como el de las baterías de metal líquido para el almacenamiento estacionario de energía proveniente de fuentes renovables. A pesar de la existencia de herramientas de software comercial (ANSYS, COMSOL, STAR-CCM+), ampliamente validadas y usadas para simulaciones de flujo de fluidos, transferencia de calor y campos electromagnéticos, fenómenos acoplados como la interacción de corrientes eléctricas con campos magnéticos que dan lugar a una fuerza de Lorentz que agita fluidos conductores son difíciles de simular. Aunado a lo anterior, se tiene el pago de elevados costos de las licencias de dichos softwares. Como se mostró a lo largo del trabajo, se ha desarrollado un modelo MHD tridimensional basado en el potencial escalar eléctrico como variable electromagnética usando la plataforma de software libre OpenFOAM®. El desarrollo se validó con casos benchmark (problema de Hartmann) ampliamente usados por la comunidad internacional, y puede ser usado para configuraciones geométricas distintas y de forma relativamente fácil, a diferencia de desarrollos basados en los clásicos lenguajes de programación (Fortran, C, C++, etc.).

Previo a la realización de simulaciones de geometrías más complejas, se ha modelado de forma separada algunos de los campos involucrados. Para el caso del campo magnético generado por imanes permanentes se ha encontrado una buena correspondencia entre resultados obtenidos de soluciones analíticas, simulaciones numéricas y mediciones experimentales. Usando la herramienta **funkySetFields** del software OpenFOAM® fue

posible implementar las soluciones analíticas para el campo magnético, permitiendo simplificar las simulaciones al modelar únicamente la región ocupada sólo por el fluido conductor, y reduciendo también los tiempos de cálculo. Posteriormente, las simulaciones de flujo mostraron una buena correspondencia tanto cualitativa como cuantitativa, para al menos dos distintas distribuciones de campo magnético y diferentes valores de corriente eléctrica. Dichas simulaciones han permitido identificar características de los patrones de flujo que mediante las mediciones experimentales no es posible.

Como trabajo a futuro se tiene la simulación de dominios sólidos acoplados a los líquidos, con objeto de entender el efecto de los electrodos metálicos en los patrones de flujo. También se planea explorar distintas dimensiones y/o geometrías. No se descarta el uso de otras variables electromagnéticas como el campo magnético inducido, lo que involucraría desarrollar un módulo distinto para resolver una ecuación de conservación para dicha variable y comparar los resultados con los ahora obtenidos.

Apéndice A

Solución analítica al modelo de carga para el campo magnético

Partimos de la ecuación de Poisson para el potencial escalar magnético descrita en la sección 3.4.1:

$$\nabla^2 \Phi_m = \nabla \cdot \mathbf{M},$$

la solución está dada por:

$$\Phi_m = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS',$$

donde $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$.

Si definimos $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ A/m^2 y $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ A/m, y tomamos el gradiente de Φ_m, obtenemos una expresión para el campo magnético $\mathbf{B}$ dada por

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'.$$

Durante su manufactura, los imanes se magnetizan a lo largo de una dirección. Para los imanes considerados en el presente trabajo se tiene una magnetización constante en la dirección de la coordenada x, es decir, $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{x}}$.

Dado que el modelo de carga considera solamente una distribución de carga magnética de forma superficial, podemos decir que $\rho_m = 0$, y la distribución están dadas en las superficies ortogonales (placas) al eje x por tanto:

$$\sigma_m = \begin{cases} \mathbf{M} & x = x_1, \\ -\mathbf{M} & x = x_2, \end{cases}$$

así que para un imán permanente tenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS'.$$

Integrando mediante funciones de Green, obtenemos las soluciones para cada componente descritas en el Capítulo 2. Así obtenemos, para la componente x, y y z respectivamente

$$B_x(x,y,z) = \frac{\mu_0 M_s}{4\pi} \sum_{k,m,n=1}^{2} (-1)^{k+m+n} \arctan\left[\frac{(y-y_m)(z-z_n)}{(x-x_k)} \mathcal{P}(x,y,z)\right], \tag{A.1}$$

$$B_y(x,y,z) = \frac{\mu_0 M_s}{4\pi} \sum_{k,m=1}^{2} (-1)^{k+m} \ln\left[\mathcal{Q}(x,y,z)\right], \tag{A.2}$$

$$B_z(x,y,z) = \frac{\mu_0 M_s}{4\pi} \sum_{k,n=1}^{2} (-1)^{k+n} \ln\left[\mathcal{R}(x,y,z)\right], \tag{A.3}$$

donde M_s es la magnetización de saturación y

$$\mathcal{P}(x,y,z) = \frac{1}{[(x-x_k)^{1/2} + (y-y_m)^{1/2} + (z-z_n)^{1/2}]^{1/2}},$$

$$\mathcal{Q}(x,y,z) = \frac{(z-z_1) + [(x-x_k)^2 + (y-y_m)^2 + (z-z_1)^2]^{1/2}}{(z-z_2) + [(x-x_k)^2 + (y-y_m)^2 + (z-z_2)^2]^{1/2}},$$

$$\mathcal{R}(x,y,z) = \frac{(y-y_1) + [(x-x_k)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_n)^2]^{1/2}}{(y-y_2) + [(x-x_k)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_n)^2]^{1/2}},$$

donde $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ corresponden a las dimensiones espaciales del imán y k, m, n corresponden a los índices iterativos de x, y, z, respectivamente.

Apéndice B

Validación numérica de la formulación-ϕ

Uno de los pocos problemas de la MHD que tiene solución analítica es el problema resuelto por Hartmann. Este problema considera un flujo que atraviesa un ducto con sección transversal cuadrada como el mostrado en la fig. B.1, expuesto a un campo magnético uniforme en la dirección y.

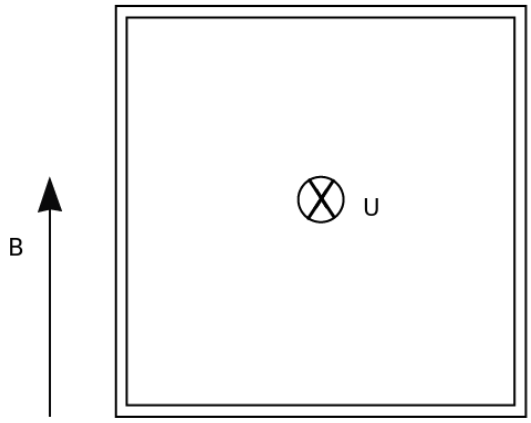


Figura B.1: Ducto de sección transversal cuadrada.

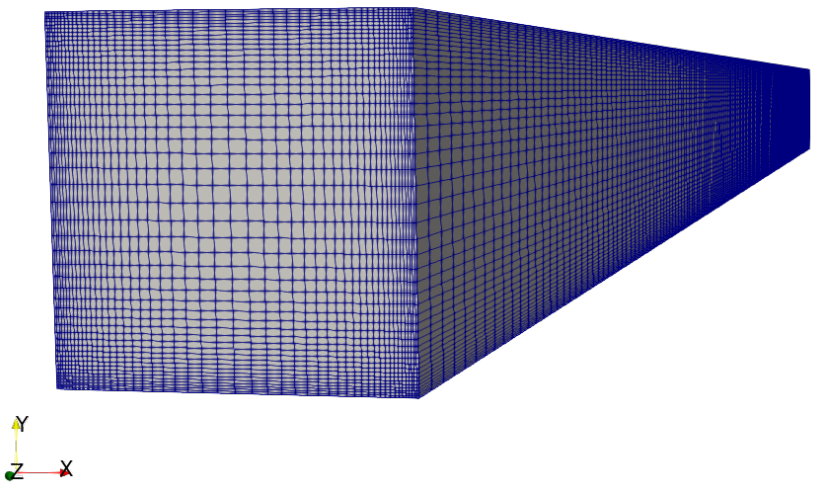


Figura B.2: Mallado computacional desarrollado en OpenFOAM®.

Consideramos un fluido newtoniano, conductor de electricidad, incompresible y completamente desarrollado, por tanto partimos de la ecuación de continuidad y conservación de momento con el término correspondiente a la fuerza de Lorentz,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{B.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nu \nabla^2 + \mathbf{F}. \tag{B.2}$$

Tomando en cuenta las consideraciones ya mencionadas, la ecuación (B.2) se reduce a

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \nabla p / \rho, \tag{B.3}$$

y a partir de la ley de Ohm calculamos la corriente inducida debida al movimiento del fluido

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{B.4}$$

Entonces la fuerza de Lorentz debida a la interacción de la corriente inducida con el campo magnético impuesto es

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \sigma u_z B_y^2, \tag{B.5}$$

que sustituyendo la ec. (B.5) en la ec. (B.3) y expandiendo el término disipativo obtenemos

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + \sigma u_z B_y^2 = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}. \tag{B.6}$$

La ec. (B.6) la adimensionalizamos definiendo las siguientes variables

$x^* = \frac{x}{a}$	Coordenada x adimensional
$y^* = \frac{y}{a}$	Coordenada y adimensional
$z^* = \frac{z}{b}$	Coordenada z adimensional
$J_x^* = \frac{J_x}{\lvert J_x \rvert}$	Densidad de corriente adimensional
$B_y^* = \frac{B_0}{\lvert B_0 \rvert}$	Campo magnético adimensional
$v_0 = \sqrt{\frac{\sigma u_z B_0 a}{\rho}}$	Velocidad característica
$v^* = \frac{v}{v_0}$	Velocidad adimensional
$p^* = \frac{p}{\rho v_0^2}$	Presión adimensional
$\alpha = \frac{J_x B_0 a^2}{\mu v_0}$	Presión adimensional debida a la fuerza de Lorentz
$H_a = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$	Número de Hartmann
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	Viscosidad cinemática
$R_e = \frac{v_0 a}{\nu}$	Número de Reynolds

Introduciendo las variables adimensionales en la ec. (B.6) nos queda

$$\frac{\mu v_0}{a^2} \left(\frac{d^2 u^*}{dx^{*2}} + \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} \right) + \sigma v_0 u^* B_0^2 B_0 B_0^{*2} = \frac{\rho v_0^2}{a} \frac{dp^*}{dz^*}. \tag{B.7}$$

Ahora multiplicando la ec. (B.7) por $a^2/\mu v_0$ podemos agrupar las variables de manera que podemos expresar la ecuación en términos de los números adimensionales H_a y R_e, se considera también que $\frac{dp^*}{dz^*}$ es un parámetro constante (α), por tanto obtenemos (omitiendo los *)

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right)+H_a^2uB_0^2=R_e\frac{dp}{dz}=\alpha. \tag{B.8}$$

La ecuación anterior es lineal por lo que es posible proponer una solución para la u de la forma:

$$u(x,y)=f(x)g(y). \tag{B.9}$$

Debido a la condición de no deslizamiento para la velocidad en las paredes del ducto, se usa como condición de frontera $u=0$ en $y=\pm1$ y $x=\pm1$; entonces

$$\alpha=\sum_{n,impar}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin(n\pi x),$$

por tanto la solución propuesta toma la siguiente forma

$$u(x,y)=\sum_{n=1,impar}^{\infty}g_n(y)\sin(n\pi x). \tag{B.10}$$

Los coeficientes $g_n(y)$ de la serie en la ec. (B.10) son constantes en el eje x pero funciones en y. Así sustituyendo la ec. (B.10) en la ec. (B.8), obtenemos

$$g_n^{''}(y)+(H_a^2B_0^2-n^2\pi^2)g_n(y)=\frac{4}{n\pi}, \tag{B.11}$$

donde las funciones $g_n(y)$ están dadas por:

$$g_n(y)=0, \tag{B.12}$$

para n par y

$$g_n^{''}(y)+(H_a^2B_0^2-n^2\pi^2)g_n(y)=\frac{4}{n\pi}, \tag{B.13}$$

para n impar; por lo tanto la solución general está dada por

$$g_n(y) = g_n^{homogénea}(y) + g_n^{particular}(y). \tag{B.14}$$

Para la solución de la ecuación homogénea

$$g_n^{''}(y) + (H_a^2 B_0^2 - n^2\pi^2) g_n(y) = 0, \tag{B.15}$$

hacemos

$$\lambda = \pm\sqrt{n^2\pi^2 - H_a^2 B_0^2}, \tag{B.16}$$

y la solución de la ecuación particular

$$g_n(y) = A\cosh(n\pi\lambda y) + B\sinh(n\pi\lambda y). \tag{B.17}$$

Por lo tanto la solución que satisface las condiciones de frontera de no deslizamiento $g_n(\pm 1) = 0$ es

$$u(x,y) = \sum_{n,impar}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\left(1 - \frac{\cosh(\lambda y)}{\cosh(\lambda)}\right)\sin(n\pi x). \tag{B.18}$$

Haciendo uso de la ec. (B.18) obtenemos los perfiles de velocidad a lo largo de las coordenadas y y x, comúnmente llamados perfiles para la capa de Hartmann y lateral, respectivamente. De la solución analítica es posible graficar perfiles para distintos valores de H_a y compararlos con los obtenidos numéricamente al resolver de forma completa las ecs. (3.14), (3.15), (3.22) y (3.23) usando el algoritmo desarrollado en OpenFOAM. La comparación se muestra en las figs. B.3 y B.4.

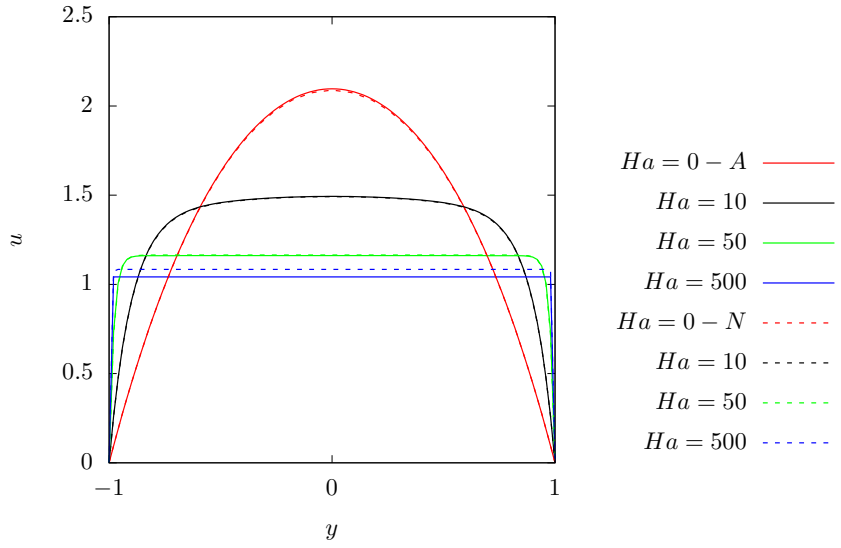


Figura B.3: Perfiles de velocidad vs. y obtenidos analíticamente (-A) y numéricamente (-N).

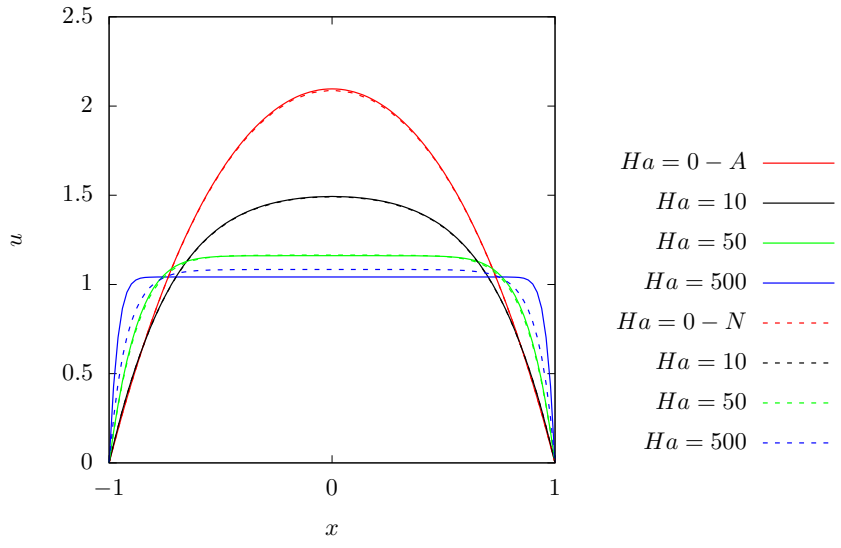


Figura B.4: Perfiles de velocidad vs. x obtenidos analíticamente (-A) y numéricamente (-N).

El porcentaje de error entre la simulación numérica y la solución analítica puede calcularse como:

$$\epsilon = \text{máx}\left(\frac{|u_{numérica} - u_{analítica|}}{u_{analítica}}\right) \cdot 100,$$

y los resultados se muestran en la Tabla B.1. Es importante observar que incluso para valores de H_a grandes el error es menor al 5%

H_a	ϵ [%]
0	0.332
10	0.1
50	0.318
500	4.068

Tabla B.1: Porcentaje de error entre la solución analítica y la numérica.

Apéndice C

Código en OpenFOAM®

```
/*---------------------------------------------------------------------------*\
file name: "epotFoam.C"
Field           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
Operation       |
And             | Copyright (C) 1991-2007 OpenCFD Ltd.
Manipulation
\*---------------------------------------------------------------------------*/

#include "fvCFD.H"
#include "pisoControl.H"

int main(int argc, char *argv[])
{
#include "setRootCase.H"
#include "createTime.H"
#include "createMesh.H"

pisoControl piso(mesh);

#include "createFields.H"
#include "initContinuityErrs.H"

Info<< "\nStarting time loop\n" << endl;

volVectorField lorentz = sigma *
(
((U ^ B0) ^ B0) -
(fvc::grad(PotE) ^ B0)
```

```
);

while (runTime.loop())
{
Info<< "Time = " << runTime.timeName() << nl << endl;

#include "CourantNo.H"

fvVectorMatrix UEqn
(
fvm::ddt(U)
+ fvm::div(phi, U)
- fvm::laplacian(nu, U)
==
(1.0/rho) * lorentz
);

if (piso.momentumPredictor())
{
solve(UEqn == -fvc::grad(p));
}

while (piso.correct())
{
volScalarField rAU(1.0/UEqn.A());
volVectorField HbyA(constrainHbyA(rAU*UEqn.H(), U, p));

surfaceScalarField phiHbyA
(
"phiHbyA",
fvc::flux(HbyA)
+ fvc::interpolate(rAU)
* fvc::ddtCorr(U, phi)
);

adjustPhi(phiHbyA, U, p);

constrainPressure(p, U, phiHbyA, rAU);

while (piso.correctNonOrthogonal())
{
fvScalarMatrix pEqn
(
```

```
fvm::laplacian(rAU, p)
==
fvc::div(phiHbyA)
);

pEqn.setReference(pRefCell, pRefValue);

pEqn.solve(mesh.solver(p.select(piso.finalInnerIter())));

if (piso.finalNonOrthogonalIter())
{
phi = phiHbyA - pEqn.flux();
}
}

#include "continuityErrs.H"

U = HbyA - rAU*fvc::grad(p);
U.correctBoundaryConditions();
}

surfaceScalarField psiub =
fvc::interpolate(U ^ B0) & mesh.Sf();

fvScalarMatrix PotEEqn
(
fvm::laplacian(PotE)
==
fvc::div(psiub)
);

PotEEqn.setReference(PotERefCell, PotERefValue);

PotEEqn.solve();

surfaceScalarField jn = psiub
- (fvc::snGrad(PotE) * mesh.magSf());

surfaceVectorField jnv =
jn * mesh.Cf();

volVectorField jfinal =
fvc::surfaceIntegrate(jnv) -
```

```
(fvc::surfaceIntegrate(jn) *
mesh.C());

jfinal.correctBoundaryConditions();

lorentz = sigma* (jfinal ^ B0);

runTime.write();

Info<< "ExecutionTime = " << runTime.elapsedCpuTime() << " s"
<< " ClockTime = " << runTime.elapsedClockTime() << " s"
<< nl << endl;
}

Info<< "End\n" << endl;
return 0;
}
```

```
/* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * //
file name: "createFields.H"
Field           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
Operation       |
And             | Copyright (C) 1991-2007 OpenCFD Ltd.
Manipulation
// * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * */

Info<< "Reading transportProperties\n" << endl;
IOdictionary transportProperties
(
IOobject
(
"transportProperties",
runTime.constant(),
mesh,
IOobject::MUST_READ_IF_MODIFIED,
IOobject::NO_WRITE
)
);

dimensionedScalar nu
(
"nu",
dimViscosity,
transportProperties.lookup("nu")
);

dimensionedScalar rho
(
"rho",
dimDensity,
transportProperties.lookup("rho")
);

dimensionedScalar sigma
(
"sigma",
dimensionSet(-1, -3, 3, 0, 0, 2, 0),
transportProperties.lookup("sigma")
);
```

```
Info<< "Reading field p\n" << endl;
volScalarField p
(
IOobject
(
"p",
runTime.timeName(),
mesh,
IOobject::MUST_READ,
IOobject::AUTO_WRITE
),
mesh
);

Info<< "Reading field U\n" << endl;
volVectorField U
(
IOobject
(
"U",
runTime.timeName(),
mesh,
IOobject::MUST_READ,
IOobject::AUTO_WRITE
),
mesh
);

Info<< "Reading field B\n" << endl;
volVectorField B0
(
IOobject
(
"B0",
runTime.timeName(),
mesh,
IOobject::MUST_READ,
IOobject::NO_WRITE
),
mesh
);

#include "createPhi.H"
```

```
Info<< "Reading field PotE\n" << endl;
volScalarField PotE
(
IOobject
(
"PotE",
runTime.timeName(),
mesh,
IOobject::MUST_READ,
IOobject::AUTO_WRITE
),
mesh
);

label pRefCell = 0;
scalar pRefValue = 0.0;
setRefCell
(
p, mesh.solutionDict().subDict("PISO"), pRefCell, pRefValue
);
mesh.setFluxRequired(p.name());

label PotERefCell = 0;
scalar PotERefValue = 0.0;
setRefCell
(
PotE, mesh.solutionDict().subDict("PotE"),
PotERefCell, PotERefValue
);
mesh.setFluxRequired(PotE.name());
```

Bibliografía

[1] Stefani Frank Weier Tom Wondrak Thomas Weber Norbert, Galindo Vladimir. Numerical simulation of the tayler instability in liquid metals. *New Journal of Physics*, 15(4), apr 2013. xiii, 3

[2] Mario Herrera-Ortega. Flujo forzado electromagnéticamente en una cavidad cilíndrica. Technical Report 1, Insituto Tecnológico de Morelia, Lomas de Santiaguito, Morelia, Mich., 6 2017. xiii, xiii, 6, 8, 25, 36

[3] Francisco Peña-Gallardo. Convección natural en geometrías para secadores de biomasa. Technical Report 1, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH, 10 2017. xiii, 10, 13, 17, 18

[4] P. A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2001. 1, 10, 12

[5] A. Goetzberger and V. U. Hoffmann. *Photovoltaic solar energy generation*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2005. 2

[6] Personnettaz Paolo Salas Alejandro Weier Tom Weber Nobert, Nimtz Michael. Electromagnetically driven convection suitable for mass transfer enhancement in liquid metal batteries. *Applied Thermal Ingineering*, 2018. 2

[7] Hojong Kim, Dane A. Boysen, Jocelyn M. Newhouse, Brian L. Spatocco, Brice Chung, Paul J. Burke, David J. Bradwell, Kai Jiang, Alina A. Tomaszowska, Kangli Wang, Weifeng Wei, Luis A. Ortiz, Salvador A. Barriga, Sophie M. Poizeau, and Donald R. Sadoway. Liquid metal batteries: Past, present, and future. *Chemical Reviews*, 2013. 2

[8] David J. Bradwell. *Liquid Metal Batteries: Ambipolar electrolysis and alkaline earth electroalloying cells*. PhD thesis, 2005. 2

[9] Personnettaz Paolo Weier Tom Sadoway Donald Weber Norbert, Nimtz Michael. Numerical simulation of mass transfer enhancement in liquid metal batteries by means of electro-vortex flow. *Journal of Power Sources Advances*, 2020. 2

[10] Yunpei Zhu, Yi Cui, and Husam N. Alshareef. An anode-free Zn–MnO2 battery. *Nano Letters*, 2021. 3

[11] José Núñez Ismeli Alfonso Aguilar-García Tania L., Michel Rivero and Alberto Beltrán. Effect of electromagnetically driven liquid metal flows on the electric potential difference in a cuboid vessel. *Journal of Power Sources*, 483:229162, 2021. 3, 5

[12] Tom Weier Douglas H. Kelley. Fluid mechanics of liquid metal batteries, 2017. 3

[13] Douglas H. Kelley and Donald R. Sadoway. Mixing in a liquid metal electrode. *Physics of Fluids*, 26(5):057102, 2014. 3, 5

[14] Alberto Beltrán. Mhd natural convection flow in a liquid metal electrode. *Applied Thermal Engineering*, 114, 09 2016. 3

[15] I. Alfonso Beltrán A., Núñez J. Electromagnetically driven flow of weak electrolyte with liquid metal stratified in a cylindrical container: Experimental study. *Magnetohydrodynamics*, 56, march 2020. 3

[16] COMSOL. *COMSOL Multiphysics®*. www.comsol.com, 2017. 3

[17] Ansys. *ANSYS engineering simulation and 3D design software.* www.ansys.com. 3

[18] OpenFOAM. *OpenFOAM® +1912*. www.openfoam.com. 4

[19] Beltrán A. Smolentsev S., Cuevas S. Induced electric current-based formulation in computations of low magnetic reynolds number magnetohydrodynamic flows. *Journal of Computational Physics*, 229(5):1558 – 1572, 2010. 4, 14

[20] Karla Acosta-Zamora. Modelado y simulación del flujo en una configuración de electrodo para baterías de metal líquido. Technical Report 1, Escuela Nacional de Estudios Superiores Unidad Morelia, UNAM, 01 2019. 4

[21] Douglas H Kelley and Donald R Sadoway. Mixing in a liquid metal electrode. *Physics of Fluids*, 26(5):057102, 2014. 5

[22] Oleg Zikanov. Metal pad inestabilities in liquid metal batteries. *Physical review*, 12 2015. 5

[23] S. T. Werely M. Raffel, C. E. Willert and J. Kompenhans. *Particle image velocimetry; a practical guide*. Springer, 2007. 5

[24] Alberto Beltrán. *Dinámica de flujos en obstáculos magnéticos*. PhD thesis, UNAM, 2010. 9, 14, 15, 34

[25] Edward Furlani. Permanent magnet and electromechanical devices : Materials, analysis, and applications / e.p. furlani. 01 2001. 9

[26] E. Mas de les Valls. *Development of a simulation tool for MHD flows under nuclear fusion conditions*. PhD thesis, 2011. 9

[27] E. Furlani. *Permanent Magnet and Electromechanical Devices*. Electromagnetism. Academic Press, San Diego, 2001. 11, 21, 25

[28] Hrvoje Jasak. *Error Analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. PhD thesis, 1996. 22

[29] John M Cimbala and Yunus A Çengel. *Essentials of fluid mechanics: fundamentals and applications*. McGraw-Hill Higher Education, 2008.

[30] I.G. Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids, Third Edition*. Dekker Mechanical Engineering. Taylor & Francis, 2002.

[31] Bühler L. Müller U. *Magnetofluiddynamics in channels and containers*. Springer, 2001.

[32] P. A. Davidson. Magnetohydrodynamics in materials processing. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31(1):273–300, 1999.

[33] Haomiao Li, Huayi Yin, Kangli Wang, Shijie Cheng, Kai Jiang, and Donald Sadoway. Liquid metal electrodes for energy storage batteries. *Advanced Energy Materials*, 05 2016.

[34] A. Tassone. Magnetic induction and electric potential solvers for incompressible mhd flows. *In Proceedings of CFD with OpenSource Software, 2016, Edited by Nilsson. H.,*, 2017.

[35] Jaime González Velasco. Energías renovables. *Reverte, Barcelona*, 2009.

[36] O. Z. Yuxin Shen. Thermal convection in liquid metal battery. 2016.

[37] M. S. Whittingham. History, evolution, and future status of energy storage. *Proceedings of the IEEE*, 100(Special Centennial Issue):1518–1534, 2012.

[38] David J Bradwell, Hojong Kim, Aislinn HC Sirk, and Donald R Sadoway. Magnesium–antimony liquid metal battery for stationary energy storage. *Journal of the American Chemical Society*, 134(4):1895–1897, 2012.

[39] Martin Seilmayer, Frank Stefani, Thomas Gundrum, Tom Weier, Gunter Gerbeth, Marcus Gellert, and Günther Rüdiger. Experimental evidence for a transient tayler instability in a cylindrical liquid-metal column. *Physical review letters*, 108(24):244501, 2012.

[40] Mark Crawford. Liquid metal batteries may revolutionize energy storage. *ASME articles*, June 2017.

[41] Torres, E Porras León, and R Casate Fernández. Manual sobre electricidad y magnetismo. *Manuales para universidades politécnicas*, 14(3):437 – 444, 1999.

[42] M.F.J. Kremers, Johannes Paulides, E. Ilhan, J.L.G. Janssen, and E.A. Lomonova. Relative permeability in a 3d analytical surface charge model of permanent magnets. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49:2299–2302, 05 2013.

[43] J. M. Camacho and V. Sosa. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista mexicana de física E*, 59:8 – 17, 06 2013.

[44] Philip Cardiff. Introduction to meshing in openfoam. 01 2017.

[45] J. Hartmann. Hg-dynamics i theory of the laminar flow of an electric-ally conductive liquid in a homogeneous magnetic field. 1937.

[46] Francesco Ferroni. *Magneto-hydrodynamic simulations of liquid metal flows in fusion reactors*. PhD thesis, 2012.